Математичне моделювання електротехнічних систем

Лекція 8

7. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ОБРОБЦІ ДАНИХ

Будь-якому фахівцеві в своїй практичній діяльності доводиться вивчати залежності між різними параметрами досліджуваних об'єктів, процесів і систем.

Наприклад: залежність числа оборотів двигуна від навантаження, тобто $\mathbf{n=f(M_{кр.})}$; залежність сили різання при обробці деталі на металоріжучому верстаті від глибини різання, тобто $\mathbf{P=f(t)}$, і так далі

Зі всіх способів завдання залежностей найбільш зручним є аналітичний спосіб завдання залежності у вигляді функції $\mathbf{n=f(M_{кр}.)}$, $\mathbf{P=f(t)}$, $\mathbf{y=f(t)}$.

Проте на практиці фахівець найчастіше отримує залежності між досліджуваними параметрами експериментально. В цьому випадку ставиться натурний експеримент, змінюються значення параметрів на вході системи, вимірюються значення параметрів на виході системи. Результати вимірювань заносяться в таблицю.

Таким чином, в результаті проведення натурного експерименту отримуємо залежності між досліджуваними параметрами у вигляді таблиці, тобто отримуємо, так звану, табличну функцію.

Далі з цією табличною функцією необхідно вести науково-дослідні розрахунки.

Розглянемо два завдання по обробці дослідних даних:

- завдання інтерполяції
- завдання апроксимації.

7.1 Інтерполяція функцій

Дана таблична функція, тобто дана таблиця, в якій для деяких дискретних значень аргументу $\mathbf{x_i}$, розташованих в порядку зростання, задані відповідні значення функції $\mathbf{y_i}$:

i	x	y
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
...	...	...
i	x_i	y_i
...	...	...
n	x_n	y_n

$y_i = f(x_i), i = \overline{0,n}$ (7.1)Точки з координатами **(x_i, y_i)** називаються вузловими точками або вузлами.

Кількість вузлів в табличній функції рівна **N=n+1**.

На графіці таблична функція представляється у вигляді сукупності вузлових точок (рис. 7.1).

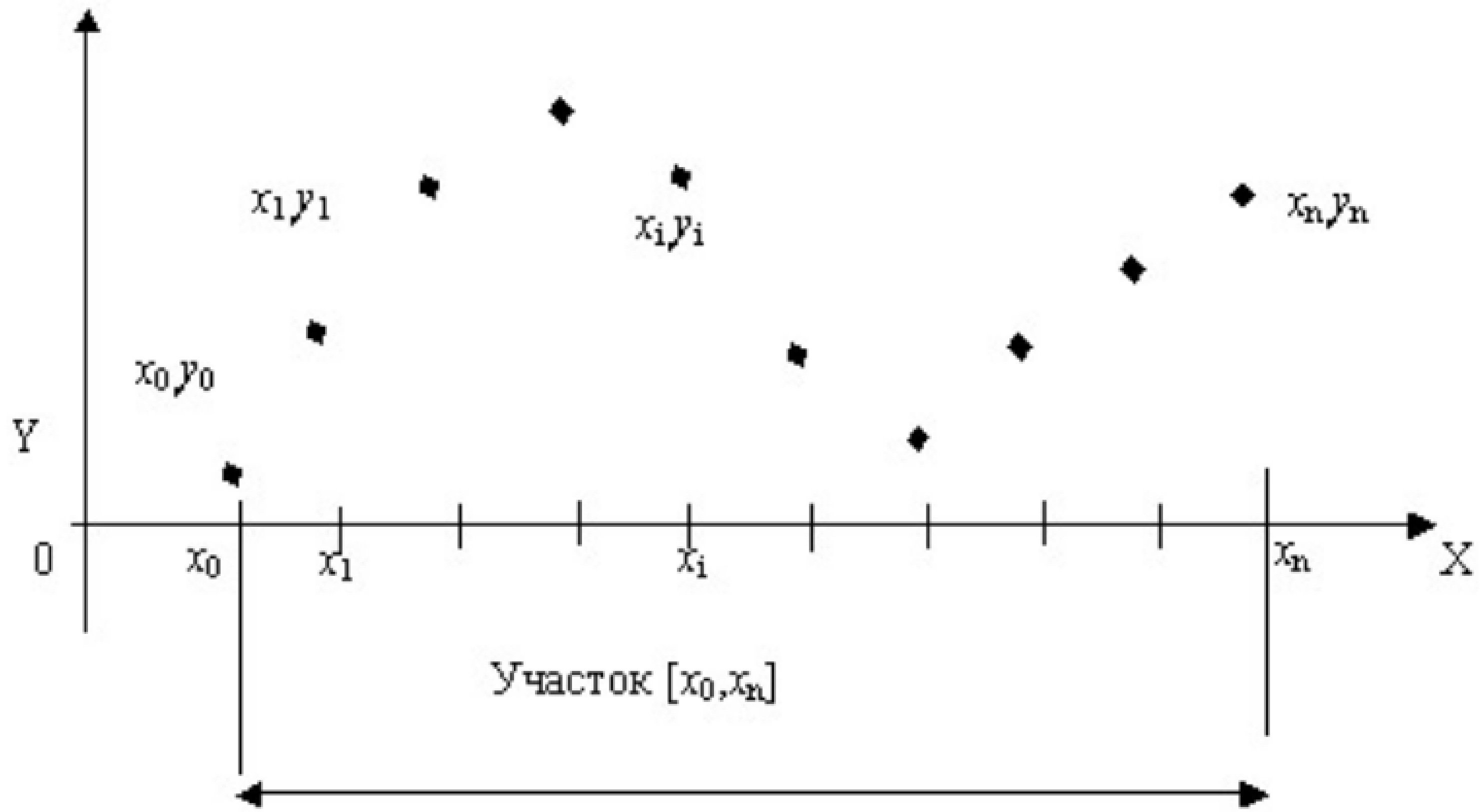

Рисунок 7.1 – Таблична функція представлена у вигляді вузлових точок

Довжина ділянки **[x_0, x_n]** дорівнює **(x_n – x_0)**.

функції для аргументів, які відсутні в таблиці, – такі завдання називаються завданнями інтерполяції або екстраполювання.

Завдання інтерполяції функції (або завдання інтерполяції) полягає в тому, щоб знайти значення **y_k** табличної функції в будь-якій проміжній точці **$x_к$**, розташованою усередині інтервалу **[x_0, x_n]**, тобто

$$x_1 < x_k < x_{i+1} \text{ і } x_k \in [x_0; x_n]$$

Завдання екстраполювання функції (або завдання екстраполяції) полягає в тому, щоб знайти значення **y_i** табличної функції в точці **x_i**, яка не входить в інтервал **[x_0, x_n]**, тобто:

$$x_1 < x_0; x_1 > x_n$$

Таке завдання часто називають завданням прогнозу.

Обидві ці завдання вирішуються за допомогою знаходження аналітичного виразу деякій допоміжній функції **F(x)**, яка наближала б задану табличну функцію, тобто у вузлових точках приймала б значення табличних функцій

Для визначеності завдання шукану функцію **F(x)** шукатимемо з класу многочленів алгебри:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x^1 + a_n x^0 \qquad (7.2)$$

Цей многочлен повинен пройти через всі вузлові точки, тобто

$$P_n(x_i) = y_i \qquad (7.3)$$

Тому ступінь многочлена ***n*** залежить від кількості вузлових точок **N** і рівна кількості вузлових точок мінус один, тобто **n=N-1**.

Многочлен вигляду (7.2) , який проходить через всі вузлові точки табличної функції називається інтерполяційним многочленом.

Інтерполяція за допомогою многочленів алгебри називається параболічною інтерполяцією.

Таким чином, для вирішення завдання інтерполяції перш за все необхідно вирішити задачу, яку можна сформулювати таким чином:

для функції $F(x_i) = y_i \; i = 0,1,2,\ldots,n$, заданою табличний, побудувати інтерполяційний многочлен ступеня **n**, який проходить через всі вузлові точки таблиці:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x^1 + a_n x^0$$

де

n – ступінь многочлена, рівна кількості вузлових точок **N** мінус один, тобто **n=N-1**.

В результаті, в будь-якій іншій проміжній точці $\mathbf{x_k}$, розташованою усередині відрізання $\mathbf{[x_0, x_n]}$ виконується наближена рівність $\mathbf{P_n(x_k) = f(x_k) = y_k}$. (рис.7.2)

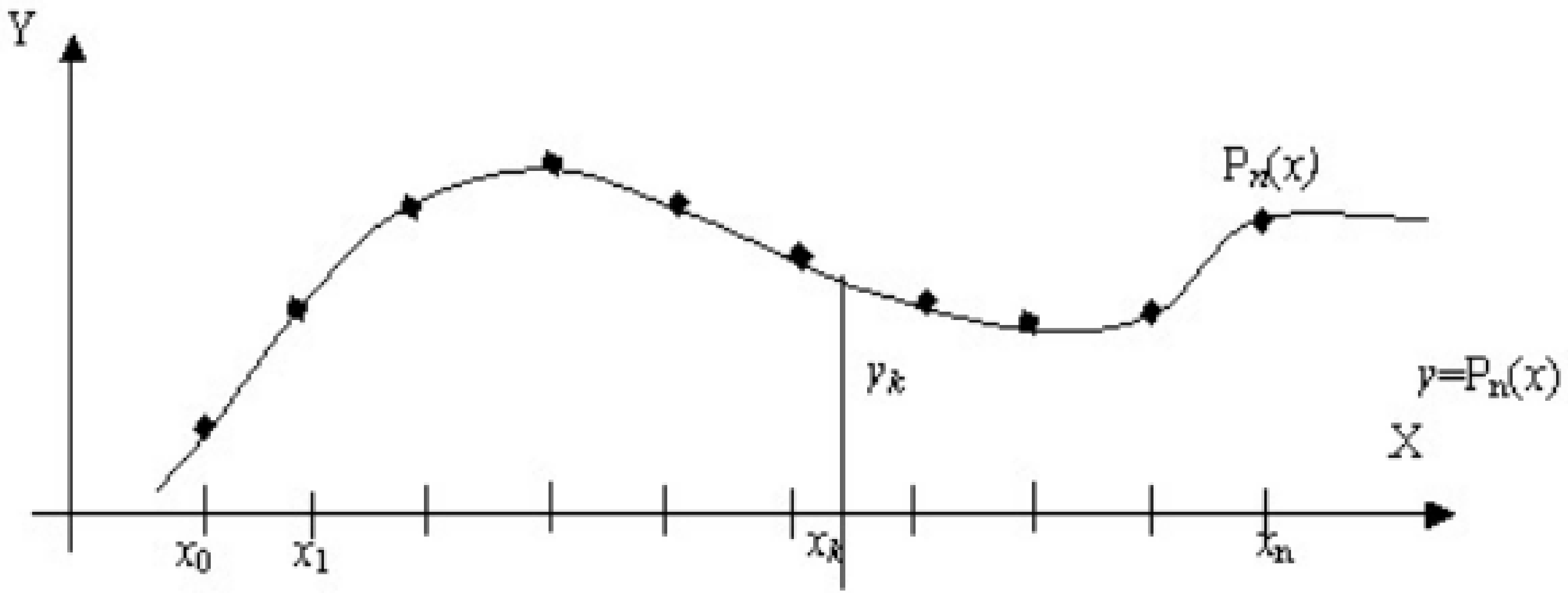

Рисунок 7.2 – Побудований інтерполяційний многочлен ступеня **n**, який проходить через всі вузлові точки

7.2 Побудова інтерполяційного многочлена в явному вигляді

Для побудови інтерполяційного многочлена вигляду (7.2) необхідно визначити його коефіцієнти **a_0, a_1, :, a_n**, тобто **a_i $i=0,1,2,:,n$**. Кількість невідомих коефіцієнтів рівна **$n+1=N$**,

де

n – ступінь многочлена (7.2),

N – кількість вузлових точок табличної функції (7.1).

Для знаходження коефіцієнтів, використовуємо властивість (7.3) інтерполяційного многочлена (7.2). На підставі цієї властивості інтерполяційний многочлен повинен пройти через кожну вузлову точку **(x_i, y_i)** таблиці 7.1, тобто,

$$Pa_0 x_i^n + a_1 x_i^{n-1} + a_2 x_i^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x_i^1 + a_n x_1^0, i = 0,1,\ldots,n \qquad (7.4)$$

Підставляючи в (7.4) кожну вузлову точку таблиці 7.1 отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \ldots a_{n-1} x_0 + a_n = y_0 \\ a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \ldots a_{n-1} x_0 + a_n = y_1 \\ \ldots \\ a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \ldots a_{n-1} x_0 + a_n = y_n \end{cases} \qquad (7.5)$$

Невідомими системи (7.5) є $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, **:**, $\mathbf{a_n}$ тобто коефіцієнти многочлена (7.2). Коефіцієнти при невідомих системи (7.5)

$x_i^n, x_i^{n-1}, \cdots, x_i^0, i = 0,1,\cdots,n,i,:,n$ легко можуть бути визначені на підставі даних таблиці 7.1.

7.3 Інтерполяція по Лагранжу

Інтерполяційний многочлен може бути побудований за допомогою спеціальних інтерполяційних формул Лагранжа, Ньютона, Стерлінгу, Бесселя і ін.

Інтерполяційний многочлен по формулі Лагранжа має вигляд:

$$
\begin{aligned}
L_n(x) = {} & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_n)}\cdot y_0 + \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}\cdot y_1 + \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}\cdot y_2 + \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}\cdot y_n
\end{aligned}
\qquad (7.6)
$$

Доведемо, що многочлен Лагранжа є інтерполяційним многочленом, що проходить через всі вузлові точки, тобто у вузлах інтерполяції $\mathbf{x_i}$ виконується умова $\mathbf{L_n(x_i) = y_i}$. Для цього послідовно підставлятимемо значення координат вузлових точок таблиці 7.1 в многочлен (7.6). В результаті отримаємо:

якщо $\mathbf{x=x_0}$, то $\mathbf{L_n(x_0) = y_0}$,

якщо $\mathbf{x=x_1}$, то $\mathbf{L_n(x_1) = y_1}$,

:::::

якщо $\mathbf{x=x_n}$, то $\mathbf{L_n(x_n) = y_n}$.

Це досягнуто за рахунок того, що в чисельнику кожного дробу при відповідному значенні $\mathbf{y_j}$, $\mathbf{j=0,1,2,:,n}$ відсутній співмножник $\mathbf{(x\text{-}x_i)}$, в якому $\mathbf{i=j}$, а знаменник кожного дробу отриманий заміною змінною $\boldsymbol{x}$ на відповідне значення $\mathbf{x_j}$.

Таким чином, інтерполяційний многочлен Лагранжа наближає задану табличну функцію, тобто $\mathbf{L_n(x_i) = y_i}$ і ми можемо використовувати його як допоміжну функцію для вирішення завдань інтерполяції, тобто $L_n(x_k) \approx y_k$.

Чим більше вузлів інтерполяції на відрізку $[\mathbf{x_0, x_n}]$, тим точніше інтерполяційний многочлен наближає задану табличну функцію (7.1), тобто тим точніше рівність:

$$f(x_k) \approx L_n(x_k)$$

Проте із збільшенням числа вузлів інтерполяції зростає ступінь інтерполяційного многочлена **n** і в результаті значного зростає об'єм обчислювальної роботи. Тому при великому числі вузлів необхідно застосовувати ЕОМ. В цьому випадку зручно знаходити значення функції в проміжних крапках, не отримуючи многочлен в явному вигляді.

При рішенні задачі екстраполювання функції за допомогою інтерполяційного многочлена обчислення значення функції за межами відрізання $[x_0, x_n]$ зазвичай проводять не далі, чим на один крок **h**, рівний

найменшій величині $\left| x_{i+1} - x_i \right|$ оскільки за межами відрізання $[x_0, x_n]$ погрішності, як правило, збільшуються.

7.4 Інтерполяція по Ньютону

Дана таблична функція:

i	x_i	y_i
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
...	...	...
n	x_n	y_n

або

$$y_i = f(x_i), i = \overline{0, n} \tag{7.7}$$

Точки з координатами **(x_i, y_i)** називаються вузловими точками або вузлами.

Кількість вузлів в табличній функції рівна **N=n+1**.

Необхідно знайти значення цієї функції в проміжній крапці, наприклад, **x=D**, причому $D \in [x_0, x_n]$.

Для вирішення завдання будуємо інтерполяційний многочлен. Інтерполяційний многочлен по формулі Ньютона має вигляд:

$$
\begin{aligned}
L_n(x) = {} & f(x_0) + (x - x_0)\cdot f(x_0, x_1) + \\
& + (x - x_0)(x - x_1)\cdot f(x_0, x_1, x_2) + \\
& + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdot f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \\
& + (x - x_0)(x - x_1)\cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})\cdot f(x_0, x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

де

n – ступінь многочлена,

$f(x_0), f(x_0, x_1), f(x_0, x_1, x_2), f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ - розділені різниці **0**-го, **1**-го, **2**-го,:., **n**-го порядку, відповідно.

7.5 Розділені різниці

Значення $\mathbf{f(x_0), f(x_1), :, f(x_n)}$, тобто значення табличної функції у вузлах, називаються розділеними різницями нульового порядку **(k=0)**.

Відношення $f(x_0, x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ називається розділеною різницею першого порядку **(k=1)** на ділянці $[\mathbf{x_0, x_1}]$ і рівне різниці розділених різниць нульового порядку на кінцях ділянки $[\mathbf{x_0, x_1}]$, розділеною на довжину цієї ділянки.

Для довільної ділянки $[\mathbf{x_i, x_{i+1}}]$ розділена різниця першого порядку **(k=1)** рівна

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Відношення $f(x_0,x_1,x_2)=\dfrac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}$ називається розділеною різницею другого порядку **(k=2)** на ділянці **[x_0, x_2]** і дорівнює різниці розділених різниць першого порядку, розділеній на довжину ділянки **[x_0, x_2]**.

Для довільної ділянки **[x_i, x_{i+2}]** розділена різниця другого порядку **(k=2)** дорівнює

$$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2})=\frac{f(x_{i+1},x_{i+2})-f(x_i,x_{i+1})}{x_{i+2}-x_i}$$

Таким чином, розділена різниця **k** -го порядку на ділянці **[x_i, x_{i+k}]** може бути визначена через розділені різниці **(k-1)** -го порядку по рекурентній формулі:

$$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_{i+k})=\frac{f(x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_{i+k})-f(x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+k-1})}{x_{i+k}-x_i} \qquad (7.9)$$

де $k=\overline{1,n}$; $i=\overline{0,n-k}$; **n** – ступінь многочлена.

Максимальне значення **k** рівне **n**. Тоді **i =0** і розділена різниця **n** -го порядку на ділянці **[x_0,x_n]** рівна

$f(x_0,x_1,\ldots,x_n)=\dfrac{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-f(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})}{x_n-x_0}$, тобто рівна різниці розділених різниць **(n-1)** -го порядку, розділеній на довжину ділянки **[x_0,x_n]**.

Розділені різниці $f(x_0,x_1), f(x_0,x_1,x_2),\ldots,f(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ є цілком певними числами, тому вираз (7.8) дійсно є многочленом алгебри **n** -й ступеня. При цьому в многочлені (7.8) всі розділені різниці визначені для ділянок **[x_0, x_{0+k}]**, $k=\overline{1,n}$.

Лема: алгебраїчний многочлен (7.8), побудований за формулами Ньютона, дійсно є інтерполяційним многочленом, тобто значення многочлена у вузлових точках рівне значенню табличної функції $L_n(x_i) = f(x-i) = y_i;\ i = 0,1,\ldots,n$.

Доведемо це. Хай **x=x₀**, тоді многочлен (7.8) рівний

$$L_n(x_0) = f(x_0) = y_0.$$

Хай $\mathbf{x=x_1}$, тоді многочлен (7.8) рівний

$$L_n(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)\cdot f(x_0, x_1) =$$

$$= f(x_0) + (x_1 - x_0)\cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_1) = y_1$$

Хай $\mathbf{x=x_2}$, тоді многочлен (7.7) рівний

$$L_n(x_2) = f(x_0) + (x_2 - x_0)\cdot f(x_0, x_1) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\cdot f(x_0, x_1, x_2) =$$

$$= f(x_0) + (x_2 - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} + (x_2 - x_0)(x_2 - x_0)\frac{f(x_1; x_2) - f(x_0; x_1)}{(x_2 - x_0)} =$$

$$= f(x_2) = y_2$$

Відмітимо, що рішення задачі інтерполяції по Ньютону має деякі переваги в порівнянні з рішенням задачі інтерполяції по Лагранжу. Кожен доданок інтерполяційного многочлена Лагранжа залежить від всіх значень табличної функції $\mathbf{y_i}$, **i=0,1,:n**. Тому при зміні кількості вузлових точок **N N** і ступені многочлена **n (n=N-1)** інтерполяційний многочлен Лагранжа потрібно будувати наново. У многочлені Ньютона при зміні кількості вузлових точок **N** і ступені многочлена **n** потрібно тільки додати або відкинути відповідне число стандартних доданків у формулі Ньютона (7.8). Це зручно на практиці і прискорює процес обчислень.