Математичне моделювання електротехнічних систем

Лекція 9

8. СПЛАЙНИ. РАЦІОНАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

8.1 Сплайн – інтерполяція

Сплайн — функція, область визначення якої розбита на кінцеве число відрізків, на кожному з яких сплайн співпадає з деяким многочленом алгебри.

Максимальний ступінь з використаних поліномів називається ступенем сплайна.

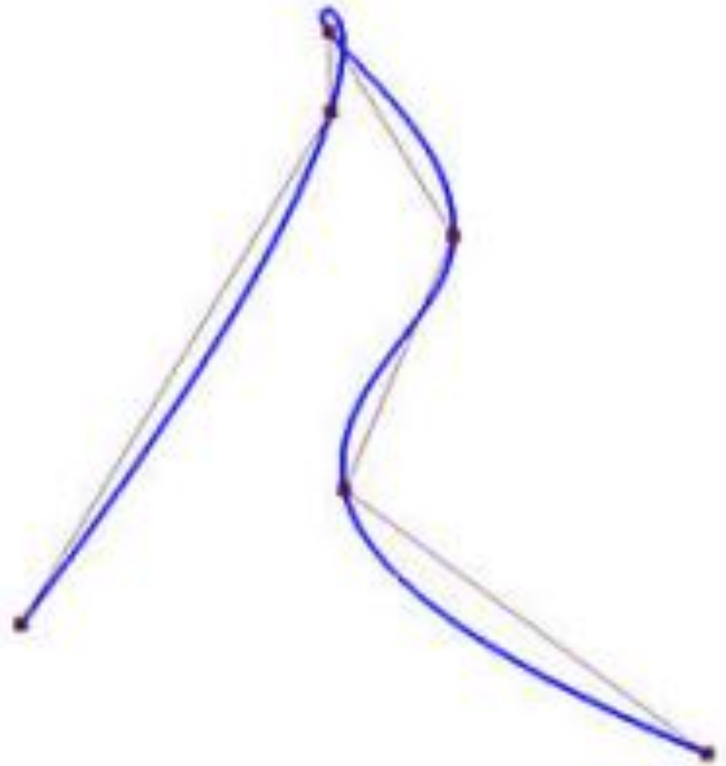

Рисунок 8.1. – Приклад сплайн апроксимації

Інтерполяція сплайнами третього порядку – це швидкий, ефективний і стійкий спосіб інтерполяції функцій. Нарівні з раціональною інтерполяцією, сплайн-інтерполяція є одній з альтернатив поліноміальної інтерполяції.

У основі сплайн-інтерполяції лежить наступний принцип. Інтервал інтерполяції розбивається на невеликі відрізки, на кожному з яких функція задається поліномом третього ступеня. Коефіцієнти полінома підбираються так, щоб виконувалися певні умови (які саме, залежить від способу інтерполяції).

Загальні для всіх типів сплайнів третього порядку вимоги – безперервність функції і, зрозуміло, проходження через позначені нею точки.

Додатковими вимогами можуть бути лінійність функції між вузлами, безперервність вищих похідних і так далі

Основними перевагами сплайн-інтерполяції є її стійкість і мала трудомісткість.

Системи лінійних рівнянь, які потрібно вирішувати для побудови сплайнів, дуже добре обумовлені, що дозволяє отримувати коефіцієнти поліномів з високою точністю. В результаті навіть про дуже великих N обчислювальна схема не втрачає стійкість. Побудова таблиці коефіцієнтів сплайна вимагає (N) операцій, а обчислення значення сплайна в заданій точці – всього лише

(log(N)).

8.2 Монотонність функцій (допоміжне питання)

Функція $\mathbf{f(x)}$ називається <u>такою, що зростає</u> на проміжку **D**, якщо для будь-яких чисел $\mathbf{x_1}$ і $\mathbf{x_2}$ з проміжку **D** таких, що $\mathbf{x_1 < x_2}$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Функція $\mathbf{f(x)}$ називається <u>такою, що убуває</u> на проміжку **D**, якщо для будь-яких чисел $\mathbf{x_1}$ і $\mathbf{x_2}$ з проміжку **D** таких, що $\mathbf{x_1 < x_2}$, виконується нерівність $\mathbf{f(x_1) > f(x_2)}$.

На показаному на малюнку графіку функція $\mathbf{y = f(x)}$, $x \in [a;b]$ зростає на кожному з проміжків $\mathbf{[a; x_1)}$ і $\mathbf{(x_2; b]}$ і убуває на проміжку $\mathbf{(x_1; x_2)}$. Звернете увагу, що функція зростає на кожному з проміжків $\mathbf{[a; x_1)}$ і $\mathbf{(x_2; b]}$,], але не на об'єднанні проміжків

$$[a;x_1) \cup (x_2;b]$$

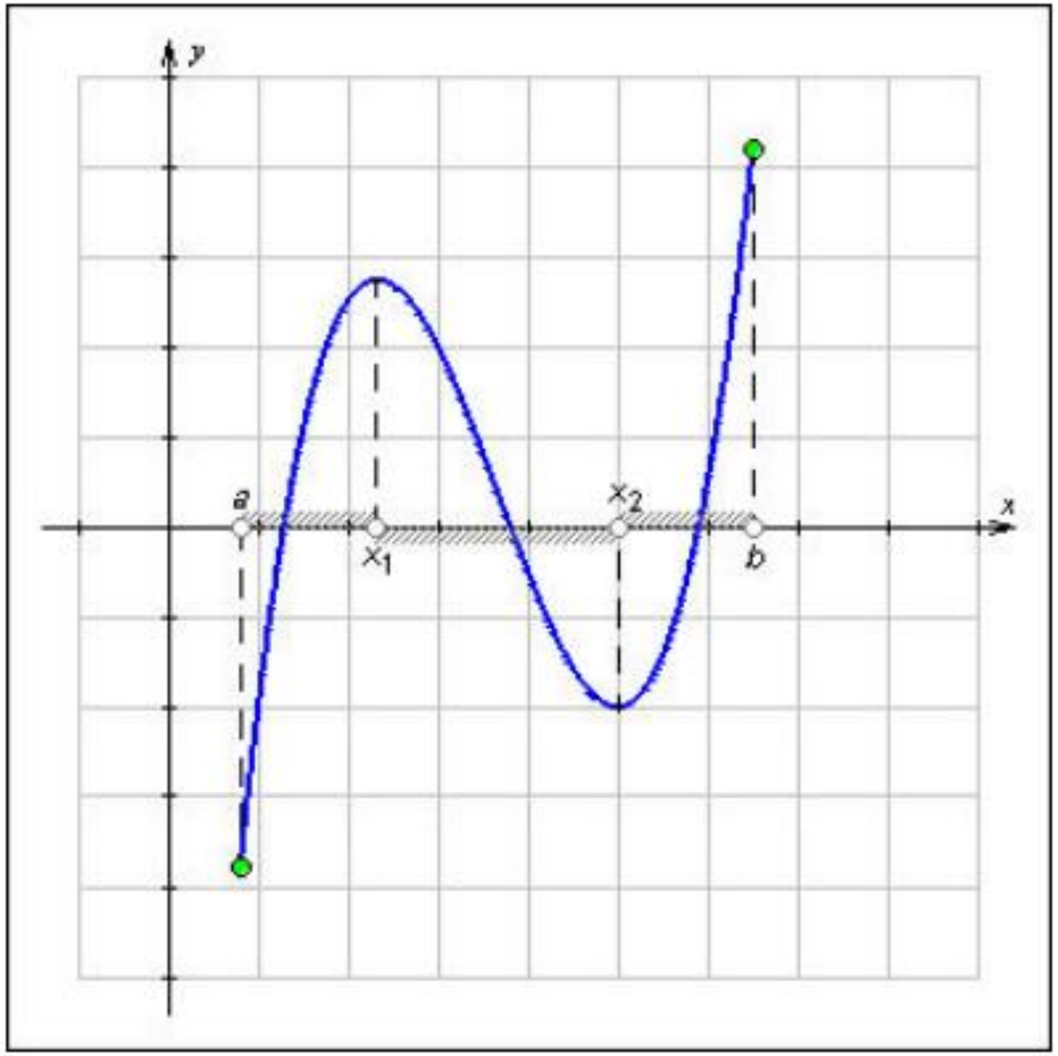

Рисунок 8.2 – Проміжки зростання і убування функції

Якщо функція зростає або убуває на деякому проміжку, то вона називається монотонною на цьому проміжку.

Відмітимо, що якщо **f** – монотонна функція на проміжку **D (f (x))**, то рівняння **f (x) = const** не може мати більш за один корінь на цьому проміжку.

Дійсно, якщо $x_1 < x_2$ – коріння цього рівняння на проміжку **D (f(x))**, то $f(x_1) = f(x_2) = 0$, що викликає протиріччя умові монотонності.

Перерахуємо властивості монотонних функцій (передбачається, що всі функції визначені на деякому проміжку **D**).

- Сума декількох зростаючих функцій є зростаючою функцією.
- Множення ненегативних зростаючих функцій є зростаюча функція.
- Якщо функція **f** зростає, то функції **cf (c > 0)** і **f + c** також зростають, а функція **cf (c < 0)** убуває. Тут **c** – деяка константа.
- Якщо функція **f** зростає і зберігає знак, то функція **1/f** убуває.
- Якщо функція **f** зростає і ненегативна, то $\mathbf{f}^{\mathbf{n}}$ де $n \in N$, також зростає.
- Якщо функція **f** зростає і **n** – непарне число, то $\mathbf{f}^{\mathbf{n}}$ також зростає.
- Композиція **g (f (x))** зростаючих функцій **f** і **g** також зростає.

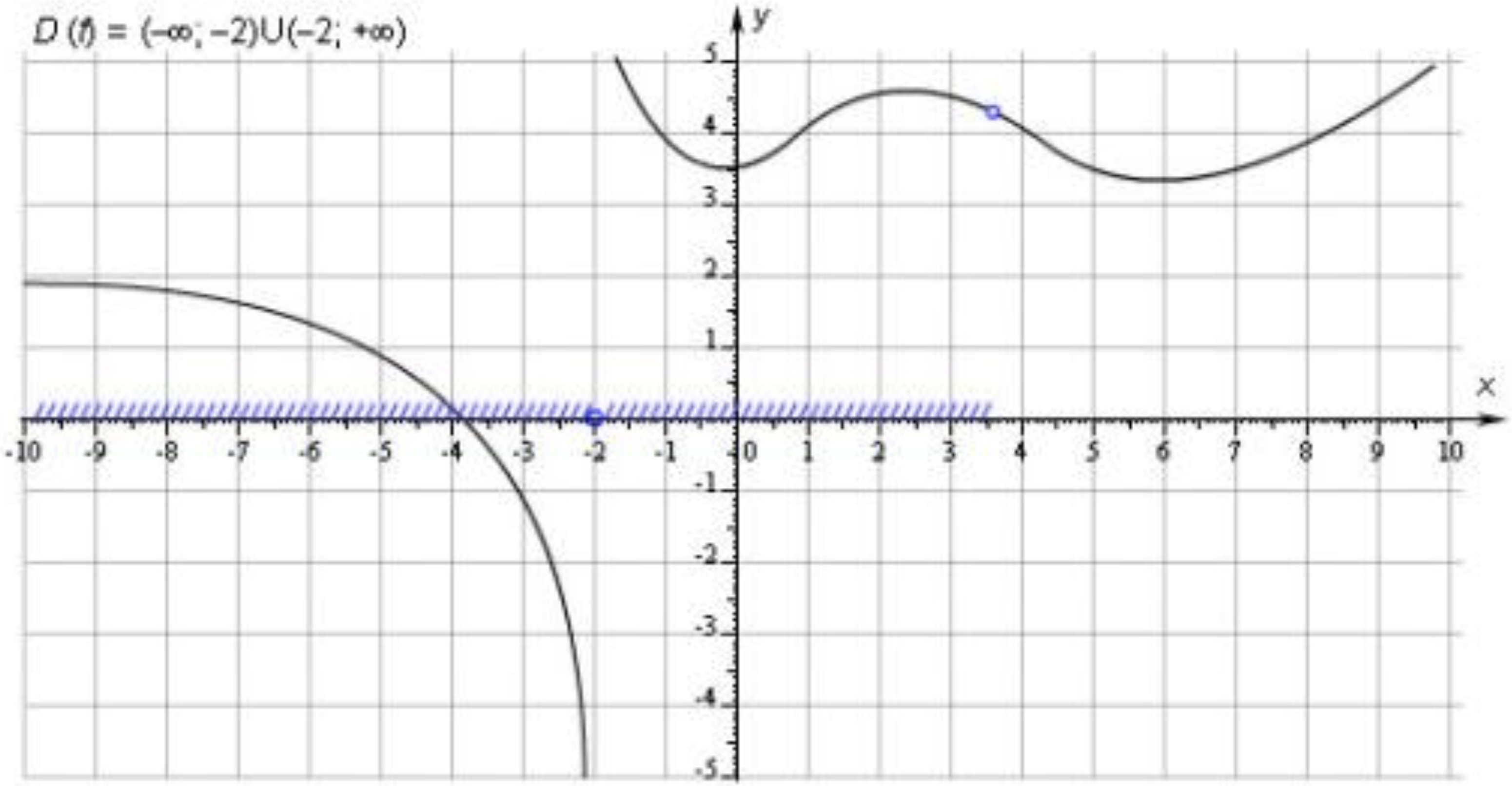

Рисунок 8.3 – Властивості функції

Точка **a** називається точкою максимуму функції **f**, якщо існує така ε - околиця точки **a,** що для будь-якого **x** з цієї околиці виконується нерівність **f (a) ≥ f (x)**.

Точка називається точкою мінімуму функції **f**, якщо існує така ε -околиця точки **a**, що для будь-якого **x** з цієї околиці виконується нерівність **f (a) ≤ f (x)**.

Точки, в яких досягається максимум або мінімум функції, називаються точками екстремуму.

У точці екстремуму відбувається зміна характеру монотонності функції. Так, зліва від точки екстремуму функція може зростати, а справа – убувати. Згідно визначенню, точка екстремуму повинна бути внутрішньою точкою області визначення.

Якщо для будь-якого $n \in D$ **(x ≠ a)** виконується нерівність **f (x) ≤ f (a)** $(a \in D)$ то точка **a** називається точкою найбільшого значення функції на множині **D**:

$$\max_{x \in D} f(x) = f(a)$$

Якщо для будь-якого $x \in D$ **(x ≠ b)** виконується нерівність **f (x) > f (b)** $(b \in D)$ то точка **b** називається точкою найменшого значення функції на множині **D**.

$$\max_{x \in D} f(x) = f(b)$$

Точка найбільшого або найменшого значення може бути екстремумом функції, але не обов'язково їм є.

Точку найбільшого (найменшого) значення безперервної на відрізку функції слід шукати серед екстремумів цієї функції і її значень на кінцях відрізання.

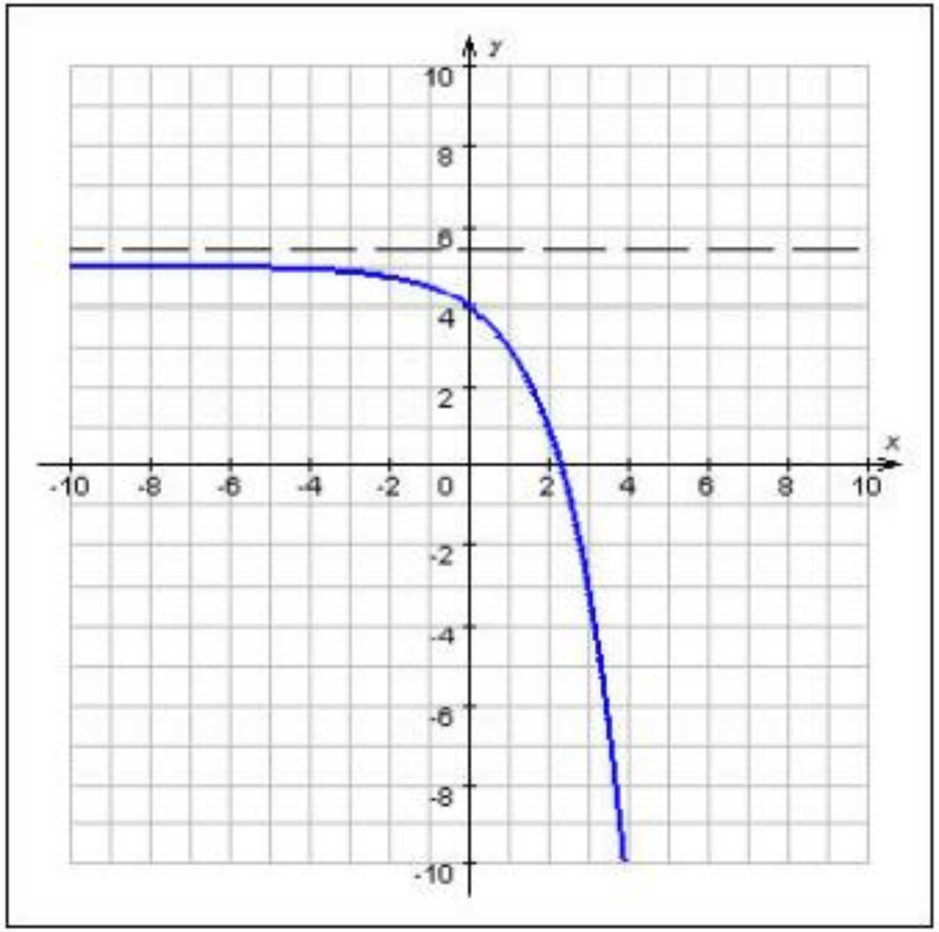

Рисунок 8.4 – Функція, обмежена зверху

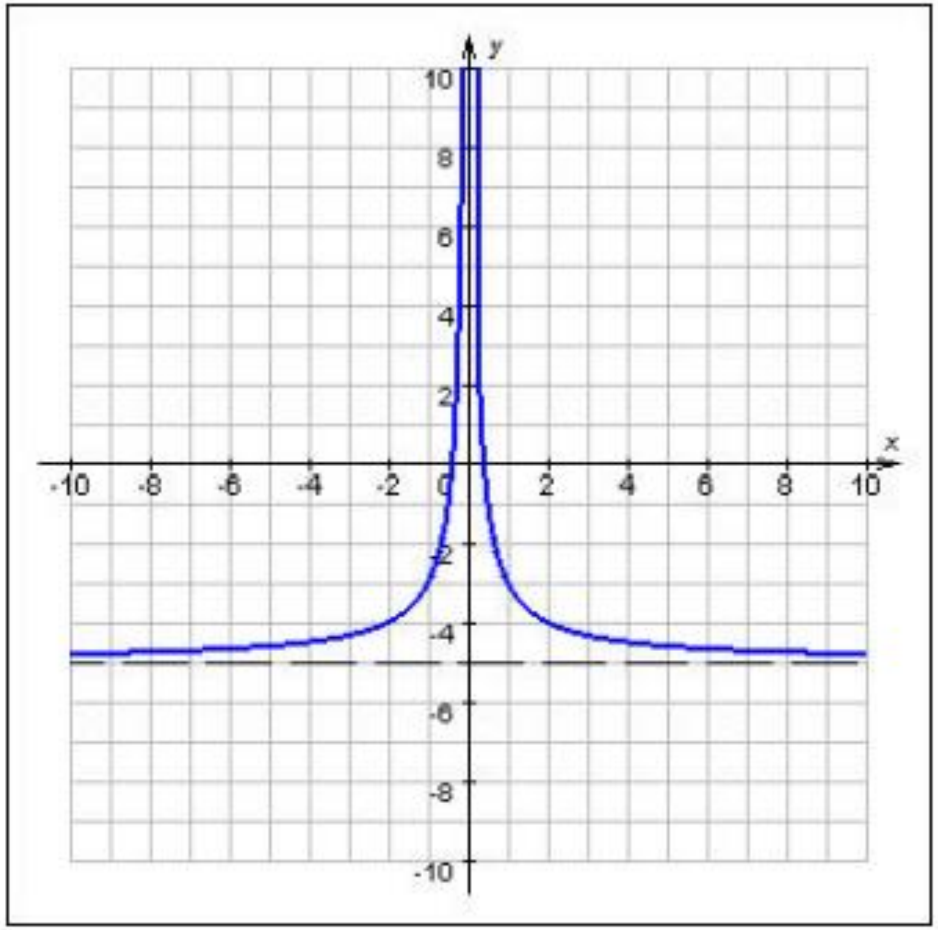

Рисунок 8.5 – Функція, обмежена знизу

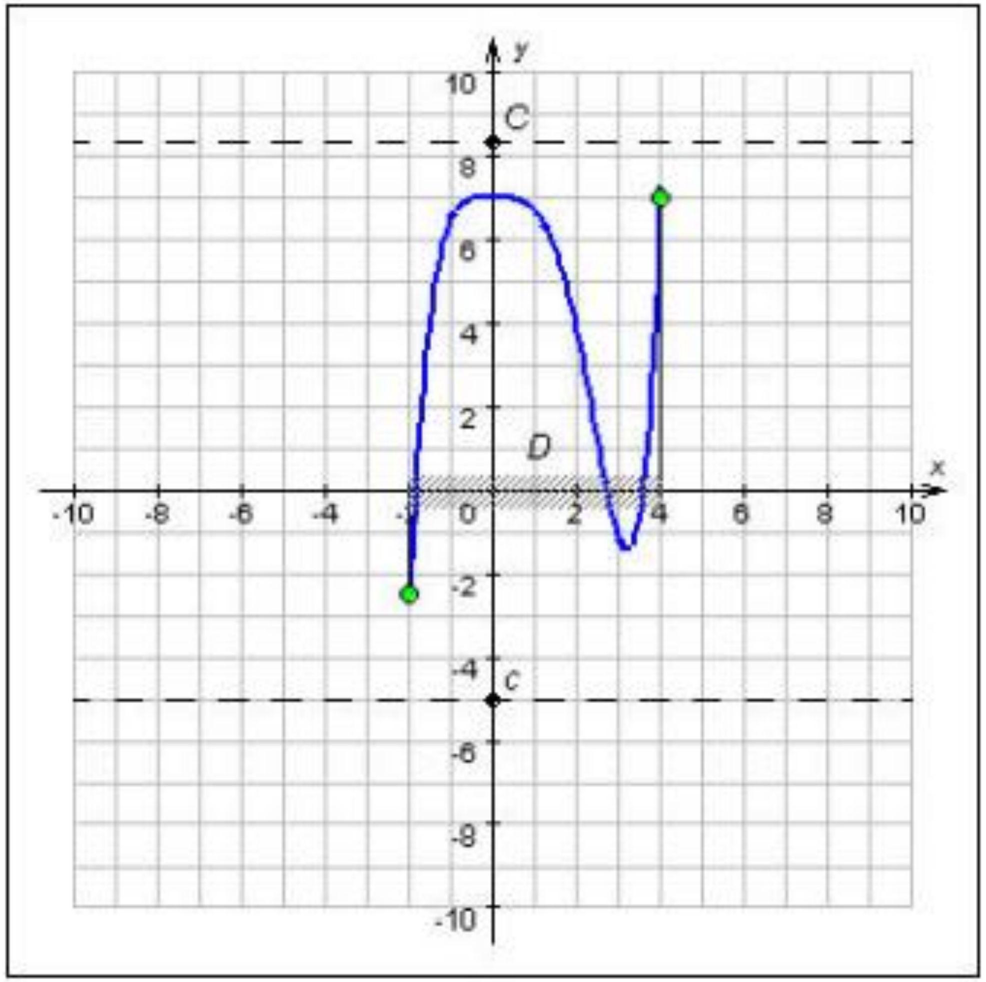

Рисунок 8.6 – Функція, обмежена на множині **D**.

Якщо існує число **C** таке, що для будь-якого $x \in D$ виконується нерівність $\mathbf{f(x) \le C}$, то функція **f** називається обмеженою зверху на множині **D**.

Якщо існує число **C** таке, що для будь-якого $x \in D$ виконується нерівність $\mathbf{f(x) \ge c}$, то функція **f** називається обмеженою знизу на множині **D**.

Функція, обмежена і зверху, і знизу, називається обмеженою на множині **D**. Геометрично обмеженість функції **f** на безлічі **D** означає, що графік функції $\mathbf{y = f(x)}$, $x \in D$ лежить в смузі $\mathbf{c \le y \le C}$.

Якщо функція не є обмеженою на множині, то говорять, що вона не обмежена.

Прикладом функції, обмеженої знизу на всій числовій осі, є функція $\mathbf{y = x^2}$. Прикладом функції, обмеженої зверху на множині $\mathbf{(-\infty; 0)}$ є функція $\mathbf{y = 1/x}$. Прикладом функції, обмеженої на всій числовій осі, є функція $\mathbf{y = \sin x}$.

8.3 Типи сплайнів

8.3.1 Лінійний сплайн

Лінійний сплайн - це сплайн, складений з поліномів першого ступеня, тобто з відрізань прямих ліній. Точність інтерполяції лінійними сплайнами невисока, також слід зазначити, що вони не забезпечують безперервності навіть перших похідних. Проте в деяких випадках кусочно-лінійна апроксимація функції може опинитися переважно, чим апроксимація вищого порядку. Наприклад, лінійний сплайн зберігає монотонність переданого в нього набору крапок.

8.3.2 Сплайн Ерміта

Сплайн Ерміта – це сплайн третього порядку, похідна якого приймає у вузлах сплайна задані значення. У кожному вузлі сплайна Ерміта задано не тільки значення функції, але і значення її першої похідної. Сплайн Ерміта має безперервну першу похідну, але друга похідна у нього розривна. Точність інтерполяції значно краща, ніж у лінійного сплайна.

8.3.3 Сплайн Катмулла-Рома

Сплайн Катмулла-Рома – це сплайн Ерміта, похідні якого визначаються по формулі:

$$S''(x_i)=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}}$$

Як і сплайн Ерміта, сплайн Катмулла-рома має безперервну першу похідну і розривну другу. Сплайн Катмулла-Рома локальний – значення сплайна залежать тільки від значень функції в чотирьох сусідніх крапках (два зліва, два справа). Можна використовувати два типи граничних умов:

- Сплайн, що завершується параболою. В цьому випадку граничний відрізок сплайна представляється поліномом другого ступеня замість третьої (для внутрішніх відрізань як і раніше використовуються поліноми третього ступеня). У ряді випадків це забезпечує велику точність, чим природні граничні умови.

8.3.4 Кубічний сплайн

Всі розглянуті сплайни, є кубічними сплайнами – в тому сенсі, що вони є кусочно-кубічними функціями. Проте, коли говорять "кубічний сплайн", то зазвичай мають на увазі конкретний вид кубічного сплайна, який виходить, якщо зажадати безперервності першою і другою похідних. Кубічний сплайн задається значеннями функції у вузлах і значеннями похідних на межі відрізання інтерполяції (або перших, або других похідних).

Якщо відоме точне значення першої похідної на обох межах, то такий сплайн називають фундаментальним. Погрішність інтерполяції таким сплайном рівна $\mathbf{O(h^4)}$.

- Якщо значення першої (або другий) похідної на межі невідоме, то можна задати т.з. природні граничні умови **S''(A)=0**, **S''(B)=0**, і отримати природний сплайн. Погрішність інтерполяції природним сплайном складає $\mathbf{O(h^2)}$. Максимум погрішності спостерігається в околицях граничних вузлів, у внутрішніх вузлах точність інтерполяції значно вища.
- Ще одним видом граничної умови, яку можна використовувати, якщо невідомі граничні похідні функції, є умова типу "сплайн, що завершується параболою". В цьому випадку граничний відрізок сплайна представляється поліномом другого ступеня замість третьої (для внутрішніх відрізань як і раніше використовуються поліноми третього ступеня). У ряді випадків це забезпечує велику точність, чим природні граничні умови.

- Можна вказати періодичні граничні умова (цей вид граничних умов використовується при моделюванні періодичних функцій).

Нарешті, можна поєднувати різні типи граничних умов на різних межах (окрім періодичних умов, які повинні бути вказані відразу на двох межах). Зазвичай так має сенс робити, якщо у нас є тільки частина інформації про поведінку функції на межі (наприклад, похідна на лівій межі – і ніякій інформації про похідній на правій межі).