Найко Д.А., Шевчук О.Ф., Побережняк Г.М.
Кафедра вищої математики, інформатики та
математичних методів в економіці ВНАУ

# ПРО ДЕЯКІ КЛАСИЧНІ ПАРАДОКСИ І СОФІЗМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

*Розглядаються деякі класичні парадокси та софізми теорії ймовірностей, пояснюється їх суть, роль, місце та основні завдання при викладанні навчальної дисципліни*

Теорія ймовірностей – розділ математики, що вивчає закономірності випадкових явищ: випадкові події, випадкові величини, їх властивості і операції над ними. Математичні моделі в теорії ймовірностей описують з певною ступінню точності випробування (експерименти, спостереження, вимірювання), результати яких неоднозначно визначаються умовами випробування.

Хоча цей розділ математики є порівняно молодим, наразі він є досить актуальним серед науковців при дослідженні, аналізі та прогнозуванні саме економічних явищ. Великим теоретичним впровадженням тут відзначаються трендові моделі, кореляційно-регерсійний аналіз, перевірка статистичних гіпотез, точкові та інтервальні оцінки досліджуваних розподілів та прогнозований розвиток випадкових явищ.

Отже, у вищий школі зростає значення курсу теорії ймовірностей при викладанні його студентам економічних спеціальностей. Вона передує та покладає основу таким дисциплінам як економетрія, статистика, економічний аналіз, аналіз господарської діяльності, економіко-математичне моделювання. А отже, проблема засвоєння студентами економічних спеціальностей основних понять, теорем та методів теорії ймовірностей є особливо актуальною.

Хоча деякі поняття та теореми теорії ймовірностей можуть здаватись інтуїтивно зрозумілими, насправді існує цілий ряд задач, розв’язання яких різними підходами, може призвести і до несподіваних результатів. Історично, в процесі становлення теорії ймовірностей, таких задач було досить багато. Для деяких з них, навіть хибні результати тривалий час вважались вірними. Це створило цілу низку, так званих, імовірнісних парадоксів і софізмів, які зустрічаються зараз у навчальній та науково-популярній літературі, як проблемні питання та задачі підвищеної складності [1-3]. Зазначимо, що парадоксом вважають правильне, хоча і дещо неочікуване твердження, а софізмом – хибний результат, отриманий на основі міркувань, які формально здаються правильними.

Використання парадоксів та софізмів при викладанні курсу теорії ймовірностей сприяє формуванню та розвитку ймовірнісного мислення, творчому підходу до розв’язання поставлених проблем, глибшому розумінню та засвоєнню теоретичного матеріалу, розумінню суті та особливостей побудови імовірнісних математичних моделей реальних процесів і явищ [4].

Наведемо деякі, найпопулярніші парадокси:

1. При киданні двох гральних кубиків суми очок «9» та «10» можна отримати двома способами: 9 = 3 + 6 = 4 + 5; 10 = 4 + 6 = 5 + 5. Якщо ж гральних кубиків три, то таких способів є шість і для «*дев'ятки*» і для «*десятки*». Практичні ж спостереження показують, що «*дев'ятка*» з'являється частіше на двох кубиках, а «*десятка*» на трьох. Тривалий проміжок часу цей парадокс вважався занадто складним. Тут проблема полягає в тому, що вищенаведені способи не є елементарними, а отже необхідно враховувати також і порядок випадання чисел. Коли кидають два гральних кубики, усіх можливих елементарних подій є 36 (рис. 1), для «*дев'ятки*» сприятливих є чотири випадки (виділено на рис. 1 жирним шрифтом), а для «*десятки*» лише три (виділено курсивом). І тому при киданні двох гральних кубиків «*дев'ятка*» з'являється частіше. Для трьох гральних кубиків, навпаки, у «*десятки*» сприятливих випадків більше і тому вона з'являється частіше.

| I к. + II к. | I к. + II к. | I к. + II к. | I к. + II к. | I к. + II к. | I к. + II к. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 + 1 | 2 + 1 | 3 + 1 | 4 + 1 | 5 + 1 | 6 + 1 |
| 1 + 2 | 2 + 2 | 3 + 2 | 4 + 2 | 5 + 2 | 6 + 2 |
| 1 + 3 | 2 + 3 | 3 + 3 | 4 + 3 | 5 + 3 | **6 + 3** |
| 1 + 4 | 2 + 4 | 3 + 4 | 4 + 4 | **5 + 4** | *6 + 4* |
| 1 + 5 | 2 + 5 | 3 + 5 | **4 + 5** | *5 + 5* | 6 + 5 |
| 1 + 6 | 2 + 6 | **3 + 6** | *4 + 6* | 5 + 6 | 6 + 6 |

Рис. 1. Перелік елементарних подій при киданні двох гральних кубиків

2. При чотирьох підкиданнях одного грального кубика ймовірність того, що принаймні один раз випаде «1», більша за 1/2. В той же час при 24 підкиданнях двох кубиків ймовірність принаймні одного випадання двох «1», менша 1/2. Це здається дивним, оскільки шанси отримати одну «1» в шість разів більші, за шанси отримання двох «1», а 24 якраз в 6 разів більше за 4. Пояснення цього парадокса є досить простим. Якщо гральний кубик підкинути $k$ разів, то загальна кількість можливих (рівноймовірних) наслідків дорівнює $6^k$. В $5^k$ випадках не випаде «1». А отже, ймовірність події $A$, що полягає у випаданні принаймні однієї «1», дорівнює:

$$P(A) = \frac{6^k - 5^k}{6^k} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k .$$

При $k = 4$ ймовірність $P(A) > 1/2$. З іншого боку, ймовірність події $B$ – випадання принаймні один раз двох «1» одночасно при $k$ підкиданнях двох кубиків дорівнює:

$$P(A) = \frac{36^k - 35^k}{36^k} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^k .$$

Ця величина менша за 1/2 при $k = 24$ і більша за 1/2, починаючи з $k = 25$.

3. Парадокс розподілу ставки. Двоє рівносильних гравців грають у гру. Той, хто першим виграє 6 партій, отримає весь приз. Припустимо, що гра зупинилась в той момент, коли перший гравець виграв 5 партій, а другий – 3.

Як справедливо розподілити приз? Зауважимо, що насправді ця проблема не є парадоксом, але безуспішні спроби багатьох відомих вчених розв'язати її та суперечливі відповіді створили їй імідж парадоксу. Згідно з одним з розв'язань, приз слід розподілити у відношенні 5 : 3 (по кількості виграних партій). Інший варіант – ділити приз у відношенні 2 : 1 (оскільки перший гравець виграв на 2 партії більше, що складає третину від необхідних для перемоги 6 партій, то перший гравець повинен отримати третину призу, а частину, що залишилась слід розділити навпіл).

Насправді ж справедливим є розподіл у відношенні 7 : 1 (пропорційний шансам гравців виграти приз). Ферма запропонував продовжити гру трьома фіктивними партіями (навіть якщо якісь із них виявляться зайвими, тобто перший гравець виграє приз раніше). Таке продовження робить всі $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ наслідків рівноймовірними. Оскільки, тільки в одному з 8 випадків другий гравець отримає приз, а в усіх інших перемагає перший гравець, то справедливим є розподіл у відношенні 7 : 1.

Майже кожен розділ курсу теорії ймовірностей можна наситити подібними парадоксами та софізмами. Практично, це сприятиме кращому засвоєнню теоретичного матеріалу, розвитку логічного мислення, активізації пізнавальної та творчої діяльності студентів.

Література:

1. Гнеденко Б.В. Очерк истории теории вероятностей. – М.: Наука, 1988.

2. Майстров Л.Е. Развитие понятия вероятности. – М.: Наука, 1980.

3. Секей Г. Парадоксы теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1989. – 240с.

4. Гончаренко Я.В., Чепорнюк І.Д. Використання парадоксів та софізмів у навчанні теорії ймовірностей / Didactics of mathematics: Problems and Investigations. – Issue # 28. – 2007. P. 94-99.