МІНІСТЕРСТВО НАУКИ І ОСВІТИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Д. А. Найко

ДОДАТНІ ОПЕРАТОРИ КЛАСУ *B* ТА ЇХНІ КОМБІНАЦІЇ

Монографія

Вінниця − 2017

УДК 517.51
ББК
Д

Рекомендовано Вченою радою Вінницького національного аграрного університету як авторську монографію
(*Протокол № від р.*)

Рецензенти:

Романюк А. С. − доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач відділу теорії функцій Інституту математики НАН України;

Ковтонюк М. М. – доктор педагогічних наук, професор, кандидат фіз.-мат. наук, завідувач кафедри математики та інформатики ВДПУ ім. М. Коцюбинського;

Михалевич В. М. – доктор техн. наук, професор, завідувач кафедри математики ВНТУ.

Д **Додатні оператори класу *B* та їхні комбінації:** Монографія. / Д. А. Найко; Вінн. нац. аграр. ун-т. – Вінниця: ВНАУ, 2017. − 150 с.

В монографії розглядається клас лінійних додатних апроксимаційних операторів, введених Ю. І. Волковим. Розв’язуються задачі поліпшення збіжності операторів цього класу. Для деяких комбінацій цих операторів (типу комбінацій Бутцера, Бернштейна, Фельбеккера, q-поліномів Бернштейна та ін.) встановлюються асимптотичні рівності типу теореми Вороновської. Доводяться прямі та обернені теореми наближення функцій. Основні результати роботи мають багатовимірні узагальнення.

УДК 517.51
ББК
ISBN

Зміст

Основні позначення

$\Leftrightarrow$ – символ рівносильності;

$\wedge$ – символ кон'юнкції;

$:=$ – символ рівності за означенням;

$\underset{x\in X}{\forall}$ або $\forall x \in X$ – для будь-якого x з множини X;

R^m – m-вимірний дійсний евклідовий простір;

$x=\left(x_1,...,x_m\right),\ t=\left(t_1,...,t_m\right)$ – елементи R^m;

$e_1=(1,0,...,0)$, … , $e_m=(0,...,0,1)$ – стандартний базис в R^m;

$xt':=x_1t_1+...+x_mt_m$ – скалярний добуток x на t (' (штрих) – символ операції транспонування вектора t);

$\|t\|:=(tt')^{1/2}$ – евклідова норма вектора t;

$\deg\ p(x)$ – степінь многочлена $p(x)$;

N – множина натуральних чисел;

$N_0:=N\bigcup\{0\}$;

N_0^m – множина мультиіндексів розмірності m з цілими невід'ємними координатами;

N^m – множина мультиіндексів розмірності m з цілими додатними координатами;

$v=(v_1,...,v_m),\ \ k=(k_1,...,k_m)$ – елементи N_0^m або N^m;

$|v|:=v_1+...+v_m$ – норма мультиіндекса v;

$\underset{|v|=r}{\forall}$ – для будь-якого $v=(v_1,...,v_m)$ такого, що $v_1+...+v_m=r$;

$k\ge v \ \Leftrightarrow\ k_1\ge v_1,...,k_m\ge v_m$;

$t^v:=t_1^{v_1}\cdot t_2^{v_2}...\,t_m^{v_m},\quad 0^0:=1$;

$v!=v_1!\cdot v_2!...\,v_m!$;

$\begin{pmatrix}\kappa\\ v\end{pmatrix}:=\dfrac{\kappa!}{v!(\kappa-v)!}$;

$(k)_\nu := k_1(k_1-1)...(k_1-\nu_1+1)...k_m(k_m-1)...(k_m-\nu_m+1)$, причому, коли хоча б одна з координат мультиіндекса ν більша за відповідну координату мультиіндекса k, то $\binom{k}{\nu} := 0$, $(k)_\nu := 0$, $(k)_0 := 1$;

$[a]$ – ціла частина числа a;

$tr\,V$ – слід матриці V;

$\operatorname{supp} f$ – носій функції f;

$D^\nu f(t) = f^{(\nu)}(x) = \dfrac{\partial^{|\nu|} f(t)}{\partial t_1^{\nu_1}...\partial t_m^{\nu_m}}$ – похідна ν-го порядку функції f в точці t, $\nu \in N_0^m$;

$\dfrac{df}{dt} := \left(\dfrac{\partial f}{\partial t_1}\ ,\ ...\ ,\ \dfrac{\partial f}{\partial t_m}\right)$ – градієнт функції $f(t)$;

л. д. о. – лінійний додатний оператор ;

$\int\limits_{R^m} f(t)Q_n(x)(dt)$ – інтеграл функції f по мірі $Q_n(x)$, де міра залежить від n та x, як від параметрів ;

$E, E^r, C, C^r, C_0^r, H^\omega, H^\alpha, Z_\kappa^\alpha, Z$ – класи функцій – с. 16, 19, 64, 87, 88, 113, 114;

$\omega_k(f;\delta;A)$ – модуль неперервності k-го порядку функції f на множині A;

$\|f\|_{C(A)} := \sup\limits_{t\in A}|f(t)|$, $\|f\|_{C^r(A)} := m^{r/2}\max\limits_{|\nu|=r}\sup\limits_{t\in A}\left|f^{(\nu)}(t)\right|$,

$\|f\|_E := \sup\limits_{t\in R^m}(e^{-c\|t\|}|f(t)|)$, $\|f\|_{E^r} := \max\limits_{|\nu|=r}\sup\limits_{t\in R^m}(e^{-c\|t\|}\left|f^{(\nu)}(t)\right|)$;

$A^{-\rho}$ – множина всіх точок $t \in R^m$ таких, що відкрита куля радіуса ρ з центром в точці t міститься в A – с. 19, 129;

A^ρ – множина всіх таких точок $t \in R^m$, відстань від кожної з яких до множини A менша за ρ – с. 19, 114;

$\delta(t)$ – міра, зосереджена в точці $t \in R^m$, яка має в цій точці одиничну масу;

$$\delta_t(A) := \begin{cases} 1, & t \in A, \\ 0, & t \notin A; \end{cases}$$

$\mathbb{C}^m$ – m-вимірний евклідовий комплексний простір;

$F_{\varepsilon,2k+\nu}(x)$ – комбінація функцій Стєклова – с. 87;

$\dot{\Delta}_h^\nu(f;x)$ – симетрична різниця ν-го порядку функції f – с. 87;

$L_n(f;x)$ – лінійний додатний оператор класу $\boldsymbol{B}$.

Зробимо зауваження стосовно нумерації. Теореми мають потрійну нумерацію. Наприклад, через 2.3.1 позначається теорема 1 параграфа 3 розділу 2. Аналогічно, але окремо нумеруються леми.

Формули мають подвійну нумерацію, наскрізну в межах розділу. Наприклад, (2.15) означає формулу 15 розділу 2. Параграфи теж мають подвійну нумерацію, наскрізну в межах всієї книги, наприклад, через § 1.3 позначається параграф 3 розділу 1.

Вступ

Тематика робіт, присвячених вивченню лінійних додатних операторів (л. д. о.) є досить широкою. Методи та результати, пов'язані з апроксимаційними та асимптотичними властивостями л. д. о. в неперіодичному випадку є одним з головних напрямків розвитку загальної теорії лінійних додатних операторів. Оцінки швидкості наближення, асимптотичні формули лежать в основі багатьох застосувань л. д. о. у різних питаннях математичного аналізу, теорії наближення, теорії ймовірностей та математичної статистики. Розв'язання відкритих проблем у цьому напрямку є актуальним науковим завданням, важливим як для розвитку теорії, так і у зв'язку із застосуваннями.

Теорія л. д. о. розвивалась і розвивається в багатьох напрямках. Відзначимо основні з них, наводячи посилання на найхарактерніші роботи, що дають певне уявлення про ці напрямки:

1) результати загального характеру [12, 18, 25, 29, 47, 87, 105, 106, 134, 144, 167,169];

2) отримання різних аналогів і узагальнень операторів Вейєрштрасса, поліномів Бернштейна та інших операторів [5, 6, 13, 14, 20, 50–53, 60, 65, 67, 70, 74, 75, 77, 86, 91, 92, 98, 99, 107, 114, 116, 118, 121–125, 139, 142,175];

3) знаходження та уточнення оцінок швидкості наближення, прямі теореми [2, 32, 48, 54, 83, 88, 89, 103, 104, 140, 161];

4) обернені теореми та теореми насичення [7–10, 21, 24, 27, 28, 56, 59, 62, 64, 79, 85, 99, 123, 138,164];

5) виділення головного асимптотичного члена величин вигляду $\sup\limits_{f\in K}\left| f(x) - L_n(f;x)\right|$ при $n\to\infty$, зокрема знаходження локальних констант Нікольського [48, 80, 124];

6) дослідження продиференційованих операторів [61, 123, 124, 126, 145];

7) застосування [11, 63, 71, 105, 129].

Дана робота пов'язана з таким напрямом як:

8) покращення збіжності послідовностей лінійних додатних операторів [13, 21, 33, 37, 40, 41, 44, 62, 79, 81, 93, 95–97, 127, 133, 159,174].

Незважаючи на велике теоретичне значення л. д. о., їх суттєвим недоліком є повільна збіжність до апроксимованих ними функцій. Так, наприклад, які б диференціальні властивості не мала функція f (якщо лише f не є лінійною), наблизити її многочленами Бернштейна

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\ ,\ \ 0\le x\le 1, \tag{0.1}$$

неможливо швидше, ніж зі швидкістю n^{-1} $(n\to\infty)$. Є. В. Вороновською [130] було доведено таку теорему:

Якщо функція f *на відрізку* $[0;1]$ *має неперервну похідну другого порядку, то*

$$\lim_{n\to\infty} n^2(B_n(f;x)-f(x))=\frac{x(1-x)}{2}f''(x). \tag{0.2}$$

У 1957 р. П. П. Коровкін [144] довів, що коли л. д. о. $K_n(f;x)$ є алгебраїчним многочленом степеня n, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^2\left\{\left\|1-K_n(1;x)\right\|_C+\left\|x-K_n(t;x)\right\|_C+\left\|x^2-K_n(t^2;x)\right\|_C\right\}>0,$$

тобто порядок наближення лінійними поліноміальними додатними операторами не може бути кращим, ніж n^{-2} вже на системі трьох найпростіших функцій $1,\ x,\ x^2$.

У 1966 р. В. К. Дзядик [136] показав, що результат, аналогічний до результату Коровкіна, має місце, навіть дещо підсилюючись, у просторі L_p $(p\ge 1)$ $2\pi-$періодичних функцій. А саме: для будь-якого лінійного додатного оператора $A_n(f;x)$, який визначено на одному з просторів L_p $(p\ge 1)$ і є тригонометричним поліномом порядку n, виконується нерівність:

$$\left\|1 - A_n(1;x)\right\|_{L_p} + \left\|\cos x - A_n(\cos t;x)\right\|_{L_p} + \left\|\sin x - A_n(\sin t;x)\right\|_{L_p} > \frac{C}{n^2},$$

де C – додатна стала, що не залежить ні від n, ні від оператора A_n, ні від простору L_p $(p \geq 1)$, який розглядається.

Проте, відмовившись від додатності оператора, в деяких випадках на основі заданої послідовності л. д. о. можна будувати нові лінійні оператори, які здійснюють вищий порядок наближення, аніж початкові л. д. о. Наприклад, у 1932 р. С. Н. Бернштейн [111] показав, що коли функція f на проміжку $[0;1]$ має неперервну похідну четвертого порядку, то для многочленів

$$Q_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{x(1-x)}{2n} f''\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad (0.3)$$

виконується гранична рівність

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(Q_n(f;x) - f(x)\right) = \frac{x(1-x)(1-2x)}{6} f'''(x) + \frac{(x(1-x))^2}{8} f^{(4)}(x). \qquad (0.4)$$

У 1953 р. П. Л. Бутцер [13] побудував многочлени, які є лінійними комбінаціями многочленів Бернштейна B_n, B_{2n}, ... , $B_{2^{k-1}n}$ і наближають $2k$ раз диференційовну функцію зі швидкістю n^{-k}. У 1970 р. М. Френтіу [37] вдаліше підібрав коефіцієнти в комбінаціях Бутцера, внаслідок чого кожну $2k$ раз диференційовну функцію можна наблизити зі швидкістю n^{-k} за допомогою бутцерівської комбінації многочленів $B_n(f;x)$ Бернштейна, але вже степеня меншого за $2^{k-1}n$.

Надалі дослідження з питань поліпшення збіжності послідовностей л. д. о. у неперіодичному випадку проводились, в основному, у напрямку вдосконалення комбінацій Бутцера та перенесення їх на інші л. д. о. (див. основні роботи [21, 37, 62, 79, 95]). При цьому вивчались, здебільшого, комбінації окремих л. д. о. Винятком були лише декілька робіт, зокрема робота К. П. Мея [62], в якій досить повно досліджуються бутцерівські комбінації цілого класу л. д. о. (класу операторів Мея-Ісмаїла), проте, наприклад, питання наближення похідних автором не розглядається. Щодо інших підходів, то були поодинокі роботи Г. Фельбеккера [33], В. В. Тіхомірова [170], Хуан Цзужуя [174] та Ю. І. Волкова [127].

Ю. І. Волков ввів та глибоко вивчив [117−131] широкий клас лінійних додатних операторів, який у вигляді досить частинних випадків містить оператори Вейєрштрасса, многочлени Бернштейна, оператори Мірак'яна-Саса, оператори Мея-Ісмаїла та інші. Клас цих операторів, які породжуються мірами Лебега-Стілт'єса, було названо класом ***B***. У роботах Волкова вперше отримано та досліджено ряд нетривіальних багатовимірних аналогів згаданих вище одновимірних операторів, а також цілий ряд *нових* лінійних додатних операторів як в одновимірному так і в багатовимірному випадках.

У зв'язку з цим виникла задача вивчення різних комбінацій (у тому числі і бутцерівських) операторів класу ***B***, які дозволяли б покращити збіжність останніх. Зазначимо, що до появи перших робіт автора, у багатовимірному випадку задачі такого типу по суті не розв'язувались. З точки зору практичного застосування задача поліпшення збіжності послідовностей лінійних додатних операторів є особливо важливою саме у багатовимірному випадку.

Метою даної роботи було: 1. На основі операторів класу ***B*** побудувати різного типу оператори з кращими апроксимаційними властивостями. 2. Вивчити апроксимаційні властивості комбінацій л. д. о. класу ***B*** та їхніх похідних (прямі теореми). 3. Описати конструктивні характеристики функцій за заданою швидкістю їх наближення комбінаціями операторів класу ***B*** (обернені теореми). 4. Встановити багатовимірні аналоги основних результатів, отриманих в одновимірному випадку.

Тепер коротко про зміст роботи.

Основною умовою, що визначає оператор L_n класу ***B*** в одновимірному випадку, є таке операторно-диференціальне рівняння:

$$\frac{d}{dx}L_n(f;x) = nL_n((t-x)f(t);x)W(x)\,, \tag{0.5}$$

$L_n(1;x)=1$, де $W(x)$ – додатна, аналітична в деякій області X функція, своя для тієї чи іншої конкретної послідовності л. д. о. (в багатовимірному випадку $W(x)$ – додатно визначена матриця з аналітичними елементами).

У розділах 1 та 2 розглядаються комбінації операторів L_n, які визначаються рівностями:

$$H_{n,k}(f;x) := \sum_{i=0}^{2k-2} \alpha_i(x) L_n^{(i)}(f;x) n^{-[(i+1)/2]}\,; \tag{0.6}$$

$$F_{n,k}(f;x) := \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} L_n^i(f;x)\,; \tag{0.7}$$

$$Q_{n,k}(f;x) := \sum_{i=0}^{k} \beta_i(x) L_n(f^{(i)};x)\,; \tag{0.8}$$

$$\Omega_{n,k}(f;x) := \sum_{j=1}^{k} \gamma_{jk} L_{n_j}(f;x), \tag{0.9}$$

де $\alpha_i(x), \beta_i(x)$ – функції, залежні від $W(x)$ та її похідних; $L_n^{(i)}$ – продиференційовані оператори класу В;

$$L_n^i(f(t);x) := L_n(L_n^{i-1}(f;t);x), \quad i \in N;\ L_n^0(f;x) := f(x);$$

$$\gamma_{jk} = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} \frac{\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j},\ k \geq 2;\ \gamma_{11} := 1;$$

$n_j = \lambda_j n$, $n \in N$; $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ –довільні фіксовані різні числа ≥ 1.

У першому розділі даної роботи обчислюються перші асимптотичні члени різниць

$$H_{n,k}(f;x) - f(x)\,, \quad F_{n,k}(f;x) - f(x), \quad Q_{n,k}(f;x) - f(x),$$
$$\Omega_{n,k}(f;x) - f(x) \quad (n \to \infty).$$

Встановлюються теореми про наближення в точці та на відрізку функції f комбінаціями вигляду (0.6) – (0.9) та похідних $f^{(\nu)}$ похідними

$H_{n,k}^{(\nu)}(f;x)$, $F_{n,k}^{(\nu)}(f;x)$, $Q_{n,k}^{(\nu))}(f;x)$, $\Omega_{n,k}^{(\nu)}(f;)$. Крім таких результатів, на цьому шляху встановлено можливість диференціювання наступної асимптотичної рівності:

$$L_n(f;x)=\sum_{i=0}^{k}Y_i f(x)n^{-i}+o(n^{-k}) \quad (n\to\infty) \tag{0.10}$$

($Y_i:=\sum_{j=0}^{i}(a_{i\,j}(x)/(i+j)!)D^{i+j}$, функції $a_{i\,j(x)}$ визначаються рекурентним чином через $W(x)$ та її похідні), якщо функція f у точці x має достатню для цього диференційовність. Рівність (0.10) вперше встановлено у роботі [127]. Якщо в (0.10) покласти $k=1$, то

$$L_n(f;x)=\sum_{i=0}^{1}Y_i f(x)n^{-i}+o(n^{-1})= f(x)+\frac{V(x)}{2n}f''(x)+o(n^{-1}), \tag{0.11}$$

$n\to\infty$, $V(x):=\dfrac{1}{W(x)}$. Коли $L_n(f;x)=B_n(f;x)-$ многочлен Бернштейна, то (0.11) збігається з співвідношенням Вороновської (0.2). Можливість диференціювання рівності (0.11), за достатньої гладкості функції f, теж вперше встановлено в роботі [127].

У розділі 1 встановлюються також теореми про оцінку наближення на відрізку похідних (теореми 1.2.2, 1.3.2, 1.5.2).

У § 1.7 ми розглядаємо q-параметричні многочлени Бернштейна, вивчення яких розпочалося у 1997 році з появою роботи Філіпса [75]. Як виявилось, q-многочлени Бернштейна мають цілий ряд цікавих властивостей, відмінних від властивостей класичних многочленів Бернштейна. Для q-поліномів Бернштейна, визначених на степеневих функціях x^i, ми встановлюємо асимптотичну рівність типу рівності (0.10).

У §§ 2.1, 2.2 розділу 2 розглядаються обернені теореми, тобто за заданою швидкістю наближення на відрізку функції $f^{(\nu)}$ $(\nu\in N_0)$ комбінаціями $H_{n,k}^{(\nu)}(f;x)$, $F_{n,k}^{(\nu)}(f;x)$, $\Omega_{n,k}^{(\nu)}(f;x)$ встановлюється диференціальна характеристика функції $f^{(\nu)}(x)$. Ця характеристика подається мовою класичних модулів неперервності. Обернені теореми доводяться у випадку, коли оператор L_n переводить многочлен степеня m у многочлен степеня $\le m$ (за фіксованого n). При доведенні аналогічної теореми у додатному випадку, тобто для самих операторів L_n (не комбінацій), такого обмеження на оператор L_n, як показано в роботі [123], не вимагається.

Для окремих відомих операторів класу В, наприклад, многочленів Бернштейна та ін., а також їхніх бутцерівських комбінацій (комбінацій вигляду (0.9)), такого типу теореми були відомі до появи перших робіт автора. Найхарактернішими у цьому напрямку є роботи [8,9, 10, 21, 62, 79,164].

Метод доведення обернених теорем цього розділу базується на використанні деяких результатів В. К. Дзядика [134,135] і А. Ф. Тімана [165] з конструктивної теорії функцій, апарату функцій Стєклова (див., наприклад, [143,167]) та просторів фінітних функцій.

У § 2.3 розділу 2 розглядаються теореми насичення для операторів $\Omega_{n,k}^{(\nu)}(f;x)$ у припущенні, що L_n не лише зберігає степінь многочлена, але й задовольняє деякі умови регулярності. Доведення ґрунтується на використанні загальної схеми Леу [56]. Подібні теореми було доведено для випадку $\nu=0$ в роботі [62], а у випадку обмеженості функції f на всій числовій осі – в роботі [79], де вивчаються бутцерівські комбінації експоненціальних операторів Мея-Ісмаїла. У цьому параграфі, крім теорем насичення, встановлюються деякі асимптотичні подання оператора $L_n^*(f;t)$, спряженого до регулярного оператора $L_n(f;x)$ класу $\boldsymbol{B}$, та його центральних моментів.

У розділі 3 монографії встановлюються багатовимірні аналоги основних результатів, отриманих у перших двох розділах. При одержанні прямих теорем використовується методика, розроблена Ю. І. Волковим [123,124]. При доведенні обернених теорем використовуються деякі результати С. М. Нікольського [160] з конструктивної теорії функції багатьох змінних, апарат багатовимірних функцій Стєклова, розроблений в [123], та просторів багатовимірних фінітних функцій з компактним носієм. Як допоміжні результати, які мають також і самостійний інтерес, для багатовимірних операторів $L_n(f;x)$:

1) встановлено і продиференційовано асимптотичну рівність типу (0.10);

2) знайдено залежність між центральними моментами продиференційованого оператора $L_n^{(v)}$ і центральними моментами оператора L_n;

3) знайдено асимптотику центральних моментів операторів $L_n^{(v)}$ $(v \in N_0)$ при $n \to \infty$.

Результати монографії містяться в друкованих працях [146−158].

Я щиро дякую своєму учителю, професору, доктору фізико-математичних наук Юрію Івановичу Волкову, з яким мене пов'язують багаторічні дружні стосунки, за залучення до даної тематики, постановку задачі та обговорення отриманих результатів. Також маю велику честь назвати своїм учителем члена-кореспондента АН УРСР, завідувача відділу теорії функцій Інституту математики АН УРСР, професора, доктора фізико-математичних наук Владислава Кириловича Дзядика, який був одним з видатних українських математиків, взірцем справжнього вченого та надзвичайно інтелігентною людиною.

Н а у к о в е   в и д а н н я

Найко Дмитро Антонович

ДОДАТНІ ОПЕРАТОРИ КЛАССУ *В* ТА ЇХНІ КОМБІНАЦІЇ

Редактор Д.А. Найко

Підписано до друку   Формат
Папір офсетний. Ризографія. Авт. арк. 2,5.
Обл. вид. арк. 2,5. Тираж 300 прим. Зам.____.

Підготовлено до друку і видрукувано
у вищому навчальному закладі
«Вінницький національний аграрний університет».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842.
21000, м. Вінниця, вул. Сонячна, 3