

Калмыков М. А.

Восточноукраинский  
национальный  
университет  
имени Владимира Даля

УДК 621.9.048

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИРКУЛЯЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ РАБОЧЕЙ СРЕДЫ ПРИ ВИБРАЦИОННОЙ АБРАЗИВНОЙ ОБРАБОТКЕ

*У статті пропонується математична модель руху робочого середовища при вібраційній абразивній обробці. У основі моделі лежить представлення робочого середовища як в'язкої рідини, що описується рівнянням Нав'є-Стокса.*

*In the article the mathematical model of movement of the environment while the oscillation abrasive processing is offered. Model presentation of working environment is underlaid as the viscid liquid, and described by Navier-Stokes equation.*

Совершенствование процесса вибрационной обработки в большинстве случаев заключается в поиске рациональных параметров работы и конструкции циркуляционного станка.

Немаловажным и желательным условием, отмеченным в большинстве исследований, является наличие устойчивого, циркуляционного движения, которое способствует равномерной обработке деталей. Это связано с тем, что обработка в различных частях контейнера происходит с различной интенсивностью. При этом с увеличением объема контейнера, разница в интенсивности обработки по площади поперечного сечения контейнера увеличивается.

Существует также возможность, что при определенных условиях обрабатываемое изделие попадет в зону с минимальной обработкой – «застойную зону» и далее в течение всего времени обработки будет там находиться.

Таким образом, актуальной является задача исследование зависимости перемещения рабочей среды (и вместе с ней и детали) в контейнере от конструктивных характеристик вибрационного станка и режимов его работы.

Экспериментально реализовать данную задачу крайне сложно, поскольку речь идет не

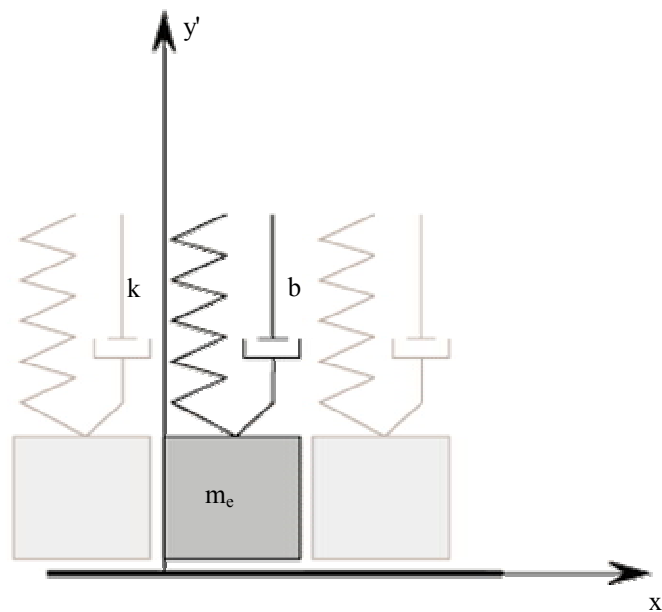
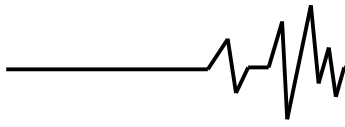
только о проведении исследований во всех частотно-амплитудных диапазонах, но и изменение таких факторов как форма контейнера и траектория его колебаний. Определить направление и скорость движения различных потоков экспериментально можно лишь с помощью применения прозрачных стенок, видео съемки и последующей раскадровки или с помощью датчиков.

Теоретические решения данной задачи, на сегодняшний день в литературе отсутствуют. Существует несколько подходов позволяющих определить среднюю скорость циркуляционного движения, а также его наличие или отсутствие, однако делать выводы на их основе о траектории движения детали в процессе обработки нельзя, тем более, что ни один из способов не учитывает форму и массу изделия.

При решении данной задачи необходимо учитывать, что в основе данного явления лежат два физических процесса:

– вибрационное транспортирование рабочей среды у стенок контейнера, в результате которого, собственно, рабочая среда и перемещается;

– изменение, под воздействием вибрации, коэффициента вязкости и проявление сыпучей средой свойств, присущих жидкостям.



**Рис. 1. Схема взаємодії стінки контейнера  
і приграничного слоя робочої середовища**

Поэтому именно описание данных процессов должно лежать в основе математической модели перемещения детали в контейнере.

Результатом моделирования, должно быть векторное поле скоростей движения элементов рабочей среды и деталей в поперечном сечении контейнера, в зависимости от его конструктивных параметров и режима работы.

Очевидно, что вибрационная обработка включает в себя несколько взаимозависимых процессов имеющих в тоже время разную физическую сущность.

Исходя из этого для решения поставленной задачи необходимо:

1. Определить точную траекторию, движения стенок контейнера;

2. Определить скорость вибрационного транспортирования рабочей среды у стенок контейнера;

3. Исходя из скорости рабочей среды у стенок контейнера, определить распределение скоростей по площади поперечного сечения;

Первый этап – моделирование движения контейнера, определение траектории движения его стенок, не представляет никакой сложности. Этот вопрос подробно рассмотрен в многих работах, на сегодняшний день уже существует общепринятая методика решения подобных задач [1,2].

Вибростанок рассматривается как одномассная динамическая система. Для ее

решения применяется уравнение Лагранжа второго рода. Будучи расписанным для соответствующих обобщенных координат оно представляет собой систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений. И решается численно в большинстве программных продуктов.

По второму пункту необходимо сказать, что наиболее распространенной методикой решения подобных задач, является представление сыпучей среды в виде масс связанных между собой реологическими элементами. Применительно к вибрационной обработке решение данной задачи было представлено в работе [3]. Основной гипотезой является тот факт, что слой рабочей среды, прилегающий к поверхности ведет себя как твердое тело, связанное с остальной массой загрузки элементами упругости и вязкости. Фрагмент рабочей среды находящийся с ним в непосредственном контакте движется точно также, поэтому взаимодействие между ними не учитывается [4] (рис. 1).

На схеме приведенной, на рисунке 1 обозначены:

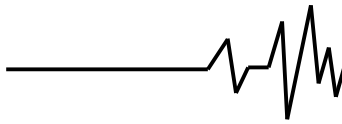
$k$  – коэффициент псевдожесткости рабочей среды;

$b$  – коэффициент демпфирования;

$m_e$  – масса элемента;

ось  $x'$  направлена вдоль стенки контейнера соответственно ось  $y'$  перпендикулярна ей.

Принимается, что оси  $x'$ ,  $y'$ , развернуты



относительно осей  $x$  и  $y$  (которые проходят через центр масс контейнера и в которых описаны его колебания) на угол  $\alpha$  везде кроме днища.

Пусть  $x_n, y_n$  – уравнение движения единичного фрагмента стенки контейнера в координатах  $x', y'$ .

Для получения уравнений движения элемента РС необходимо решать систему трансцендентных неэлементарных уравнений, каждое из которых описывает различные этапы движения. А также условия перехода между этими этапами [4].

Движение по оси  $y$  состоит из двух этапов:

– этап полета – элемент отрывается от стенки и на него действуют упругие и диссипативные силы рабочей среды;

– этап совместного движения – элемент находится на поверхности контейнера.

Уравнения, предложенные в [3], могут быть записаны в виде следующей системы:

$$\begin{cases} m_e \ddot{y}_e = -gm_e \cos \alpha - ky_e - b\dot{y}_e & \text{при } n \leq 0 \\ y_e = y_n & \text{при } n > 0 \end{cases} \quad (1)$$

здесь  $y_e$  – функция движения элемента по оси  $y'$ ;

$n$  – сила реакции опоры, которая определяется как:

$$n = gm \cos \alpha - m\ddot{y}_n + ky_n + b\dot{y}_n;$$

$g$  – ускорение свободного падения,

Первое уравнение является линейным дифференциальным уравнением решаемым аналитически. Начальные условия определяются из уравнения  $n=0$  (решаемого на полупериоде, при условии, что  $n$  поменяет знак с положительного на отрицательный).

Этап полета длится до следующего соударения, т.е. пока  $y_e > y_n$ .

Движение по оси  $x$  состоит из трех этапов:

– этап полета;

– этап скольжения;

– этап совместного движения, и описывается системой

$$\begin{cases} m_e \ddot{x}_e = -mg \sin(\alpha) - \dot{x}_e b & \text{при } n \leq 0 \\ m_e \ddot{x}_e = -mg \sin(\alpha) + \text{sign} \dot{x}_n \mu - \dot{x}_e b & \\ & \text{при } n > 0 \text{ и } \mu n \leq |m_e \ddot{x}_n| \\ x_e = x_n & \text{при } n > 0 \text{ и } \mu n > |m_e \ddot{x}_n| \end{cases} \quad (2)$$

здесь:  $x_e$  – функция движения элемента по оси  $x'$ ;

$\mu$  – коэффициент сухого трения между стенкой контейнера и элементом рабочей среды.

Несмотря на, то, что сами уравнения

несколько отличаются от предложенных в работе [4], алгоритм численного решения остается прежним, а именно:

1. Сдвиг фаз движения рассматриваемого участка поверхности контейнера, для приведения к виду:  $y_n = A'_y \sin(\omega t)$ ,  $x_n = A'_x \cos(\omega t + \psi)$  где  $A'_y$ ,  $A'_x$  – амплитуды колебаний по осям  $x'$ ,  $y'$  и  $\psi$  – сдвиг фаз между колебаниями.

2. Определение условий перехода и определение начальных условий дифференциальных уравнений.

3. Построение кусочной функции согласно алгоритму, предложенному в [4].

Общий алгоритм численного расчета выглядит следующим образом:

1. Получение амплитудно-частотных характеристик движения точки поверхности контейнера из динамической модели движения контейнера.

2. Смещение и поворот системы координат для получения уравнений в системе  $x', y'$  в соответствии с формой контейнера.

3. Определение амплитуды и сдвига фаз между движением по осям  $x', y'$  (получение уравнений движения фрагмента стенки в виде,  $y_n = A'_y \sin(\omega t)$ ,  $x_n = A'_x \cos(\omega t + \psi)$  где  $A'_y$ ,  $A'_x$  – амплитуды колебаний по осям  $x', y'$  и  $\psi$  – сдвиг фаз между колебаниями.).

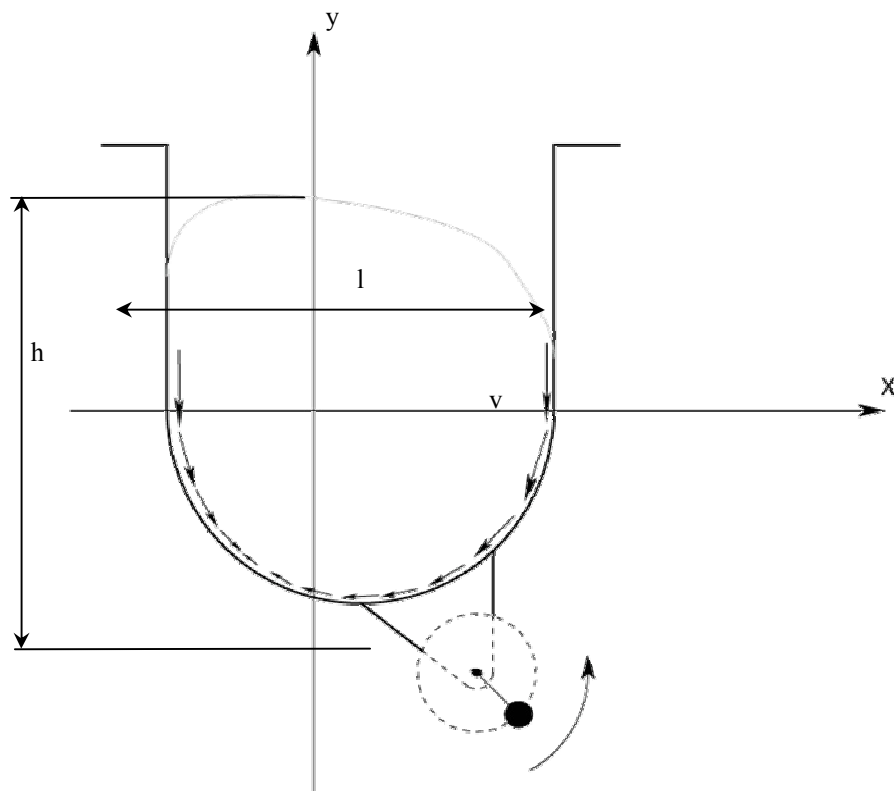
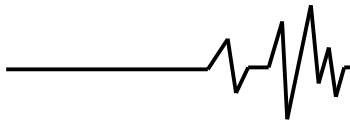
4. Получение уравнений для определения условий перехода и решение дифференциальных уравнений, основывающихся на полученных начальных условиях, для определения уравнений движения по оси  $Y$  согласно описанной выше методике.

5. Корректировка координат начальной фазы для определения параметров циркуляционного движения. За начало следует принять точку, в которой наступает режим совместного движения либо, если таковая отсутствует, определенное количество периодов, то точку после которой возникают условия, обеспечивающие режим проскальзывания.

6. Построение фрагмента кусочной функции. Переход к пункту 4.

Результатом работы данной составляющей комплексной математической модели будет величина средней скорости движения элемента по осям  $x', y'$ .

Подобный подход позволит при моделировании задавать любую форму контейнера, оценить стабильность транспортирования среды на различных интервалах поперечного сечения стенки контейнера, и кроме того исследовать влияние



**Рис. 2. Перемещение приграничных элементов РС за период колебаний по контуру контейнера**

материала стенок контейнера на величину циркуляционной скорости. Однако более подробные выводы о движении рабочей среды и траектории перемещения в ней детали можно делать лишь на основе анализа распределения скоростей рабочей среды по площади поперечного сечения контейнера.

Данный результат можно получить, только рассматривая рабочую среду как единое целое – псевдожидкость, обладающую вязкостью. Тогда для определения можно использовать математический аппарат гидродинамики.

Представление сыпучей среды под воздействием вибрации как вязкой жидкости применялся в работе [5] при рассмотрении относительного движения элементов РС.

Такие свойства сыпучей среды как текучесть, изменение вязкости в зависимости от параметров вибрации, способность проникать в трудно доступные места очевидна при непосредственном наблюдении и подтверждена многочисленными экспериментальными исследованиями.

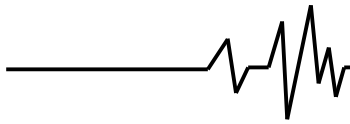
Несмотря на преимущества и явные достоинства этого подхода, в вибрационной обработке для моделирования циркуляционного движения он не применялся.

Основные трудности связаны, во-первых, со сложностью вычислений, а во-вторых, с тем, что гидродинамические параметры вибрирующей сыпучей среды изменяются в зависимости от интенсивности колебаний. Однако на сегодняшний день данные причины не являются актуальными, т.к. уже существует обширный экспериментальный материал, а также методы определения этих параметров [3].

Результатом работы математической модели движения приграничного слоя будут скорости элементов рабочей (рис. 2,  $v$  – средняя скорость перемещения элемента). Опираясь на эти данные, а также на параметры рабочей среды необходимо рассчитать скорость элементов рабочей среды в остальных точках поперечного сечения контейнера.

Такая задача может быть описана уравнением Навье-Стокса, которое в общем виде записывается следующим образом:

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right] = -\text{grad } p + \eta \Delta v + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } v + f \quad (3)$$



где:  $\rho$  – плотность среды;  $v$  – скорость среды;  $p$  – давление;  $\eta$  – динамическая вязкость;  $\xi$  – вторая вязкость;  $f$  – посторонняя сила;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\nabla$  – оператор Гамильтона;

Кроме того:  $h$  – высота загрузки;  $l$  – ширина загрузки;

Принимается, что:

– плотность рабочей среды не изменяется в зависимости от давления;

– течение является стационарным (на границе используется средняя скорость)

Тогда расписав, для двумерной системы координат, соответствующие дифференциальные операторы и учитывая, что на среду действует сила тяжести равная  $f = \rho g$ , уравнение (3) принимает вид:

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \right) + g \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $v_x, v_y$  – компоненты скорости движения среды.

Последним уравнение в системе является уравнение непрерывности.

Даная система представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных.

Необходимо решение краевой задачи, граничные условия для которой представляют собой скорости элементов рабочей среды в приграничной области (рис. 2), полученные с помощью математического аппарата, описанного ранее.

Таким образом, граничные условия представляют собой результат численного решения уравнения (2). На свободной границе давление  $p$  будет равно атмосферному.

Решением уравнения будет векторное поле скоростей движения РС внутри контейнера, а также распределение давления.

Современные вычислительные пакеты (например, Mathcad, Matlab, Maple, а также системы непосредственного численного моделирования такие как OpenFoam) не решают подобные системы дифференциальных уравнений. Поэтому ее решение предлагается реализовать использованием конечно-разностной схемы [4].

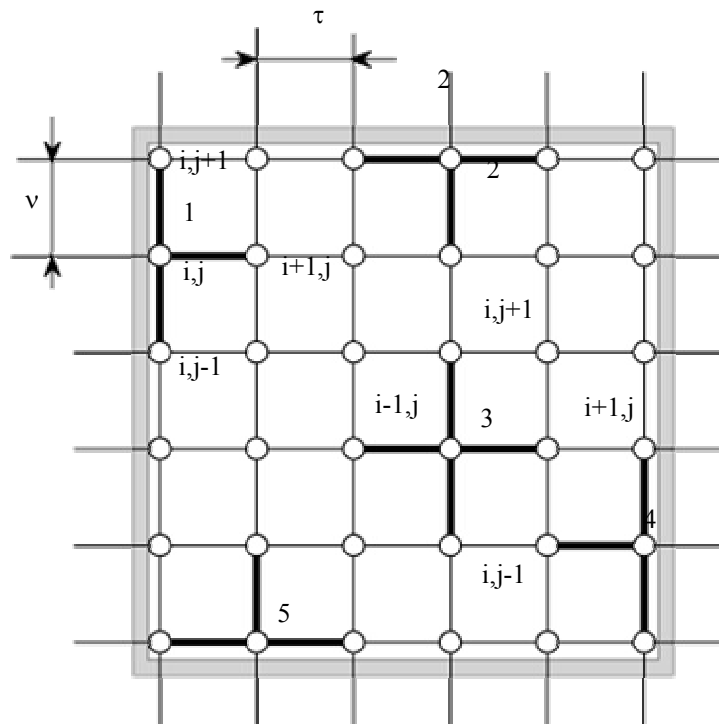
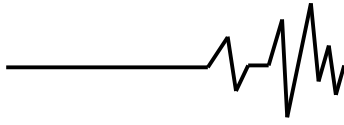


Рис. 3. Шаблоны конечно разностной схемы



С целью сокращения погрешности при выборе граничных условий и наложении их на конечно-разностную сетку, данная процедура производится в обратном порядке:

1. Задается прямоугольная область – двумерный массив  $m \times n$  элементов (конкретно при моделировании рассматривался массив  $30 \times 50$  элементов). Принимается размерность сетки  $\tau \times \nu$ . При этом:

$$\tau = \frac{h}{m}; \nu = \frac{1}{n};$$

Таким образом, данный двумерный массив является поперечным сечением контейнера.

2. На сетку накладывает функция, аппроксимирующая форму контейнера, кривая Безье, либо фрагмент эллипса. В этом случае элементы массива задаются исходя из округления применяемой функции до ближайшей соответствующей точки в сетке. Либо элементы массива задаются вручную.

По сути, данный этап является лишь заданием начального условия – формы контейнера, для всей математической модели в целом.

3. На основе полученных уравнение движения контейнера вычисляются частота и амплитуда колебаний точек стенок контейнера.

4. Для каждой точки массива, в которой задана стенка контейнера, определяется:

а. Уравнение движения контейнера и далее разворот и смещение системы координат.

б. Вычисляется уравнение движения приграничного элемента вдоль стенки контейнера – уравнение (2).

в. Определяется средняя скорость движения элемента.

г. Определяются компоненты скорости каждого приграничного элемента по координатам  $x, y$  (как проиллюстрировано на рис. 2).

Учитывая особенности граничной области, шаблон конечно разностной схемы будет варьироваться в зависимости от расположения точки (рис. 3)

При обходе полученной сетки происходит проверка – является ли рассматриваемая точка граничной и в соответствии с этим выбирается тот или иной шаблон.

Для частных производных по  $\partial x$ :

Если точка является левой границей, например  $i = 1$  (точка 1 рис. 3)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (v_x[i+1, j] - v_x[i, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (v_y[i+1, j] - v_y[i, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial^2 x} = \frac{1}{\nu^2} (v_x[i+1, j] - v_x[i, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial^2 x} = \frac{1}{\nu^2} (v_y[i+1, j] - v_y[i, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (p[i+1, j] - p[i, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (v_x[i, j] - v_x[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (v_y[i, j] - v_y[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (v_x[i, j] - v_x[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (v_y[i, j] - v_y[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (v_x[i, j] - v_x[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (v_y[i, j] - v_y[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial^2 x} = \frac{1}{\nu^2} (v_x[i, j] - v_x[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial^2 x} = \frac{1}{\nu^2} (v_y[i, j] - v_y[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (p[i, j] - p[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (v_x[i+1, j] - v_x[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (v_y[i+1, j] - v_y[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (v_x[i+1, j] - v_x[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (v_y[i+1, j] - v_y[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (v_x[i+1, j] - v_x[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (v_y[i+1, j] - v_y[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial^2 x} = \frac{1}{\nu^2} (v_x[i+1, j] - 2v_x[i, j] + v_x[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial^2 x} = \frac{1}{\nu^2} (v_y[i+1, j] - 2v_y[i, j] + v_y[i-1, j]) + O(\nu);$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\nu} (p[i+1, j] - p[i-1, j]) + O(\nu);$$

Аналогично формируются разности для частных производных по  $\partial y$ .

Таким образом, конечно-разностная схема является неявной и теоретически