Рахманов С. Р.

Национальная металлургическая академия Украины

Мельников Ю. А.

Днепропетровский национальный университет

УДК 621.774.38

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ И ВИБРОИЗОЛЯЦИИ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ МЕХАНИЗМА УДЕРЖАНИЯ ОПРАВКИ

В статье разработана математическая модель управления колебаниями и виброизоляции механической системы удержания оправки на базе функции Грина. Установлен характер виброактивности стержня механизма удержания оправки. Полученные результаты указывают на достоверность выбранной математической модели и эффективность использования системы подавления повышенной виброактивности системы.

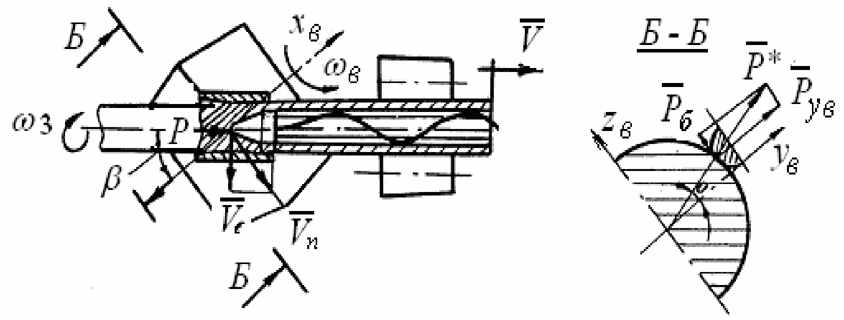
In the article a mathematical case vibrations and виброизоляции of the mechanical system of withholding of mounting frame is developed on the base of function of Grina. Character of vibration bar of mechanism of withholding of mounting is set. The got results specify on authenticity of the chosen mathematical model and efficiency of the use of the system of suppression of the promoted vibration system.

Технологический процесс прошивки сплошных цилиндрических заготовок в полые гильзы на станах винтовой прокатки сопровождается большими статическими и динамическими нагрузками. Дальнейшее форсирование скоростных и силовых режимов работы для станов винтовой прокатки труб сдерживается развитием значительных по величине и часто изменяющихся во времени динамических нагрузок. Действия динамических нагрузок являются не только причиной выхода из строя технологического инструмента и элементов оборудования, но и основной причиной снижения качества выпускаемых труб (рис. 1) [1].

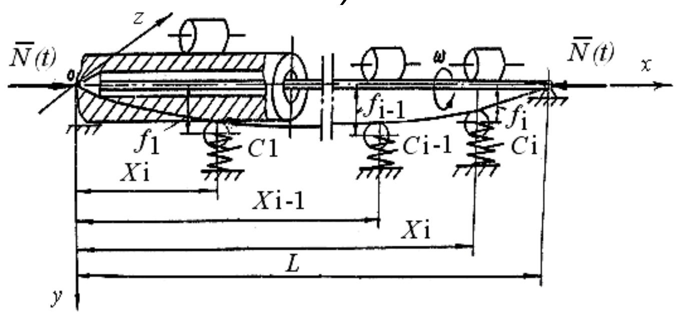
Необходимость точного (активного) управления колебаниями и разработка системы подавления повышенной виброактивности деформируемых систем механизма удержания оправки трубопрокатного агрегата (ТПА) требует дальнейшего совершенствования математической модели механической системы. Следовательно, применение более совершенной математической модели для исследования сложных динамических процессов стержневой системы механизма удержания оправки на оси прокатки является актуальным.

Для анализа существующих режимов виброактивности и прогнозирования нагружения стержня механизма удержания оправки исследуется математическая модель рассматриваемой динамической системы. Математическая модель механизма удержания оправки учитывает реальные условия в процессе прошивки: влияние переменных осевых усилий, нагрузку прокатываемой трубы, параметры и месторасположения опорных узлов центрователей.

Применением обобщенного способа решения задач механики в постановке метода Бубнова – Галеркина получено дифференциальное уравнение вынужденных колебаний стержня оправки. Следует отметить, что данное уравнение имеет вид параметрических уравнений Матье – Хилла с правой частью, являющейся функцией перемещения трубы по стержню и влияния опорных механизмов центрователей.



а)



б)

Рис. 1. Расчетная схема стержня оправки стана винтовой прокатки труб: а – схема прошивки заготовки; б– расчетная схема стержня оправки

Результатами ранее проведенных аналитических исследований установлено, что виброактивность стержневой системы механизма удержания оправки в рамках рассматриваемой модели описывается согласно[5]

$$\begin{aligned}
&\left\{1+\frac{m_q}{2\pi m}\cdot\left[2\pi\frac{V\cdot t}{\ell}-\sin\left(2\pi\cdot\frac{V\cdot t}{\ell}\right)\right].y''(t)+\frac{V\cdot m_q}{m\cdot\ell}\left[1-\cos\left(2\pi\frac{V\cdot t}{\ell}\right)\right]\cdot y'(t)+\right.\\
&+\left\{\frac{EI}{m}\cdot\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4+\frac{2}{m\cdot\ell}\sum_{i=1}^{n}C_i\sin^2\left(\frac{\pi\cdot x_{oi}}{\ell}\right)-\frac{1}{m}\left[P_0+P_1\cos\left(\omega_1\cdot t\right)\right]\cdot\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2-\right.\\
&\left.-\frac{m_q}{m}\cdot\frac{V^2}{\ell^2}\cdot\pi^2\cdot\left[2\pi\cdot\frac{V\cdot t}{\ell}-\sin\left(2\pi\frac{V\cdot t}{\ell}\right)-\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t)\right]\right\}y(t)=\\
&=\frac{2q_0}{m\cdot\pi}\left[1-\cos\left(\pi\cdot\frac{V\cdot t}{\ell}\right)\right]+\frac{f_2(t)}{\mathrm{m}}.\\
&\qquad\qquad \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}}
\end{aligned}\tag{1}$$

где V – скорость прошивки трубы; ℓ – длина стержневой системы; m_q – погонная масса трубы; m – погонная масса стержня оправки; E – модуль упругости материала стержня; C_i – жесткости опорных механизмов (центрователей), $i=\overline{1,n}$; P_0 – статическая составляющая усилия прошивки; P_1 – динамическая составляющая усилия прошивки; q_0 – интенсивность воздействия на стержневую систему прошиваемой трубой; ω – частота вращения стержня оправки; ω_1 – частота изменения динамической составляющей усилия прошивки; I – момент инерции стержня оправки; $f_2(t)$ – функция управляющего воздействия;

$f_2(t) = A_1 \cos(\beta t) + A_2 \sin(\beta t)$, A_1 и A_2 – параметры управляющего воздействия; β – частота управляющего воздействия.

Решение полученных дифференциальных уравнений стержня оправки в замкнутом виде вызывает определенные сложности математического характера.

Необходимо отметить, что общеизвестные методы решения дифференциальных уравнений, базирующихся на применении фундаментальных функций Грина, в ряде случаев существенно упрощают решение однородной краевой задачи механики деформируемого тела [2, 3].

Используя метод Лагранжа на базе вариации произвольных постоянных и теорему Гильберта, рассмотрим альтернативный способ построения функции Грина. Отметим, что, как правило, для однородной краевой задачи о виброактивности стержня механизма удержания оправки функция Грина строится согласно[5, 6].

Динамика стержневой системы механизма удержания оправки стана винтовой прокатки труб описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами. В постановке Коши данная задача имеет вид:

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t); \qquad (1^*)$$

$$y(t_{\acute{i}}) = 0; \qquad y(t_{\hat{e}}) = 0, \qquad (2)$$

где *a(t); b(t); c(t)* и f(t) – непрерывные функции на интервале $t \in [t_{\acute{i}}, t_{\hat{e}}]$ соответствующие определенному физическому смыслу данной задачи.

Предположим, что данная задача единственно разрешима. Другими словами, существующая однородная задача виброактивности стержня оправки имеет лишь тривиальное решение.

Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – фундаментальная система решений для однородного дифференциального уравнения колебаний механизма удержания оправки, соответствующей исходной постановке и условиям задачи (1).

Решение задачи виброактивности стержневой системы (1) с учетом граничных условий (2) запишем в виде согласно [6, 7]

$$y(t) = c_1(t) \cdot y_1(t) + c_2(t) \cdot y_2(t), \qquad (3)$$

где $c_1(t)$ и $c_2(t)$ – дифференцируемые на интервале $t \in (t_{\acute{i}}, t_{\hat{e}})$ функции, подлежащие определению по ходу решения задачи.

Подставив выражение $y(t)$ в (1) и следуя процедуре метода Лагранжа, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(t) \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

относительно производных от функций $c_1(t)$ и $c_2(t)$.

Определитель матрицы системы алгебраических уравнений

$$W(t) = y_1(t) \cdot y_2'(t) - y_2(t) \cdot y_1'(t), \qquad (4^*)$$

является определителем Воронского для системы фундаментальных функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Поэтому уравнение (4) имеет единственное решение, которое по правилу Крамера можно записать в виде:

$$c_1'(t) = -\frac{1}{W(t)} y_2(t) \cdot f(t); \quad c_2'(t) = -\frac{1}{W(t)} y_1(t) \cdot f(t); \qquad (5)$$

Интегрируя выражения (5), соответственно получим:

$$c_1(t) = -\int\limits_{t_{\acute{\imath}}}^{t} \frac{y_2(\xi) f(\xi)}{W(\xi)} d\xi + \gamma_1; \; c_2(t) = -\int\limits_{t_{\acute{\imath}}}^{t} \frac{y_1(\xi) f(\xi)}{W(\xi)} d\xi + \gamma_2, \tag{6}$$

где γ_1 и γ_2 – произвольные постоянные задачи.

Подставив $c_1(t)$ и $c_2(t)$ в уравнение (3), запишем

$$y(t) = \int\limits_{t_{\acute{\imath}}}^{t} \frac{1}{W(\xi)} \left[y_1(\xi) y_2(t) \mp y_1(t) y_2(\xi) \right] f(\xi) d\xi + \gamma_1 y_1(t) + \gamma_2 y_2(t). \tag{7}$$

Удовлетворим выражением (7) функции $y(t)$ краевым условиям задачи (2). Вышеизложенные предположения создают возможность составить следующую необходимую систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования задачи γ_1 и γ_2.

$$\begin{pmatrix} y_1(t_{\acute{\imath}}) & y_2(t_{\acute{\imath}}) \\ y_1(t_{\hat{e}}) & y_1(t_{\hat{e}}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{I}(t_{\acute{\imath}}, t_{\hat{e}}) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $\mathrm{I}(t_{\acute{\imath}}, t_{\hat{e}})$ – интегральная функция задачи.

$$\mathrm{I}(t_{\acute{\imath}}, t_{\hat{e}}) = \int\limits_{t_{\acute{\imath}}}^{t_{\hat{e}}} \frac{\left[y_1(t_{\hat{e}}) y_2(\xi) - y_1(\xi) y_2(t) \right]}{W(t)} f(\xi)\, d\xi \tag{9}$$

Для простоты решения задачи в общем случае введем следующие обозначения

$$R(t, \xi) = y_1(t) \cdot y_2(\xi) - y_1(\xi) \cdot y_2(t),$$

и с учетом $R(t, \xi) = -R(\xi, t),$ интегральную функцию запишем в виде:

$$\mathrm{I}(t_{\acute{\imath}}, t_{\hat{e}}) = \int\limits_{t_{\acute{\imath}}}^{t_{\hat{e}}} \frac{R(t_{\hat{e}}, \xi) \cdot f(\xi)}{\mathrm{W}(\xi)} d\xi. \tag{10}$$

Тогда решения системы уравнений (8) в соответствии с известными формулами Крамера принимают вид

$$\gamma_1 = -\int\limits_{t_{\acute{\imath}}}^{t_{\hat{e}}} \frac{y_2(t_{\hat{e}}) \cdot R(t_{\hat{e}}, \xi) \cdot f(\xi)}{R(t_{\acute{\imath}}, t_{\hat{e}}) W(\xi)} d\xi, \tag{11}$$

$$\gamma_2 = \int\limits_{t_{\acute{\imath}}}^{t_{\hat{e}}} \frac{y_1\left(t_{\acute{\imath}}\right)\cdot R\left(t_{\hat{e}},\xi\right)\cdot f\left(\xi\right)}{W\left(\xi\right)} d\xi. \tag{12}$$

Выражения (11) и (12) подставляя в (6) и (7) получим решение задачи (1) в виде:

$$y\left(t\right) = -\int\limits_{t_{\acute{\imath}}}^{t_{\hat{e}}} \frac{R\left(t,\xi\right)\cdot f\left(\xi\right)}{W\left(\xi\right)} d\xi + \int\limits_{t_{\acute{\imath}}}^{t_{\hat{e}}} \frac{R\left(t_{\acute{\imath}},t\right)R\left(t_{\hat{e}},\xi\right)f\left(\xi\right)}{R\left(t_{\acute{\imath}},t_{\hat{e}}\right)W\left(\xi\right)} d\xi\,. \tag{13}$$

После небольших преобразований выражения (13) окончательно решение задачи (1) представим в удобной форме

$$y(t) = -\int\limits_{t_{\acute{\imath}}}^{t_{\hat{e}}} G(t,\xi)\, f(\xi) d\xi\,. \tag{14}$$

Ядро полученного интеграла (14) при t ≤ ξ очевидно имеет вид

$$G(t,\xi) = -\frac{R(t_{\acute{\imath}},t)\cdot R(t_{\hat{e}},\xi)}{R(t_{\acute{\imath}},t_{\hat{e}})\cdot W(\xi)}\,. \tag{15}$$

При t > ξ ядро интеграла можно представить следующей функцией

$$G(t,\xi) = -\frac{R(t_{\acute{\imath}},t)\cdot R(t_{\hat{e}},\xi) + R(t\ \ ,\xi)\cdot R(t_{\acute{\imath}},t_{\hat{e}})}{R(t_{\acute{\imath}},t_{\hat{e}})\cdot W(\xi)}\,. \tag{16}$$

В силу упоминавшейся теоремы Гильберта $G(t,\xi)$ согласно [7, 9] есть не что иное, как известная фундаментальная функция Грина. Решение задачи соответствует выбранной расчетной схеме в исходной постановке (1) с учетом граничных условий (2).

Уточненная математическая модель построена для однородной краевой задачи колебания стержневой системы оправки и наиболее полно отражает действительное поведение динамической модели системы. Следует отметить, что с помощью составленной математической модели виброактивности деформируемой системы механизма удержания оправки становится вполне возможным отработка влияния наиболее значимых параметров системы управления параметрическими колебаниями стержня, как на стадии проектирования, так и назначения режимов прокатки труб.

Для соответствия амплитудно–частотных характеристик модели области желаемых состояний (феноменологической области) данной системы предусмотрено введение в систему активных управляющих воздействий, например в виде механических колебаний, в форме $f_2(t) = A_1\cos(\beta t) + A_2\sin(\beta t)$. Систему стабилизации виброактивности механизма удержания оправки необходимо реализовать в противофазе после определения коэффициентов управляющего воздействия A_1 и A_2, соответствующих условиям реализации колебаний системы. Применение управляющих колебаний заранее определенной структуры и амплитудно-частотных характеристик на базе фундаментальных функций Грина позволяет переводить систему из исходного динамического состояния в область желаемых состояний. Кривые, приведенные на рис. 2. и рис. 3., характеризуют параметрические колебания, возникающие в стержне оправки и динамику механизма удержания стержня в процессе прокатки труб до и после введения активного управления колебаниями системы.

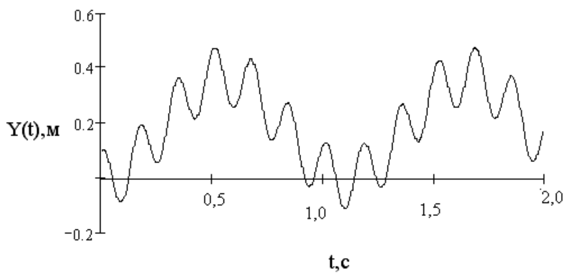


Рис. 2. Динамика стержневой системы механизма удержания оправки прошивного стана ТПА 350 при прокатке трубы ø219х14 стали 09Г2С, V=1,8 м/с (без применения управления)

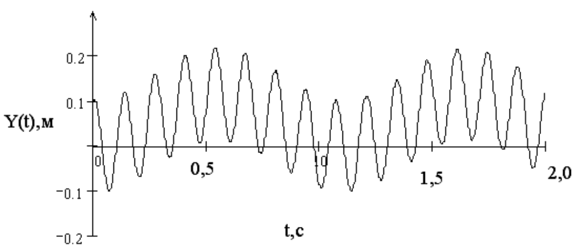


Рис. 3. Динамика стержневой системы механизма удержания оправки прошивного стана ТПА 350 при прокатке трубы ø219х14 стали 09Г2С, V=1,8 м/с (с применением активного управления)

Сопоставление результатов экспериментальных исследований виброактивности стержня оправки прошивного стана трубопрокатного агрегата ТПА 350 [2, 4, 5] с расчетными данными указывает на соответствие динамической модели действительным условиям функционирования системы при значительных динамических нагрузках.

Эффективность использования системы управления колебаниями подтверждается заметным снижением амплитудно – частотных характеристик параметрических колебаний системы и повышением качества бесшовных труб, снижением продольной и поперечной разностенности по всему технологическому переделу трубопрокатного агрегата.

Выводы

1.Установлен характер динамических процессов механизма удержания стержня оправки. Полученные результаты указывают на необходимость управления колебаниями системы и подавления повышенной виброактивности тяжелонагруженной деформируемой системы.

2. Предложена математическая модель управления колебаниями системы и механизм подавления повышенной виброактивности стержня оправки на базе фундаментальной функции Грина, которая реализуется на предложенной модели в виде внешних управляющих воздействий на систему.

3. Разработана математическая модель сложной механической системы механизма удержания стержня оправки, которая позволяет на этапе планирования технологических процессов отрабатывать и в дальнейшем реализовывать необходимые режимы активного управления процессами прошивки заготовок на стане винтовой прокатки труб.

Литература

1. Данилов Ф.А., Глейберг А.З., Балакин В.Г. Горячая прокатка и прессование труб. – М.: Металлургия, 1972. – 576 с.

2. Лордкипанидзе Д.Л., Чхартишвили И.В. Исследование колебаний стержня стана винтовой прокатки. Сообщение Академии Наук Грузинской ССР, вып. 88, №1, 1977. С. 145 – 148.

3. Несис Е.И. Методы математической физики: Учебн. пособие. – М.: Просвещение, 1977. – 199с.

4. Оклей Л.Н. Качество горячекатаных труб. М.: Металлургия, 1986. – 144 с.

5. Рахманов С.Р. Динамика стрежневой системы механизма удержания оправки прошивного стана трубопрокатного агрегата. Материалы Международной конференции «Современные направления производства сварных и бесшовных труб из черных и цветных металлов», Днепропетровск. – 2007. С.

6. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение, 1976. – 350 с.

7. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.И. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа. – 1970. – с.712.

8. Справочник по специальным функциям. /Под ред. М. Абрамовича и И. Стиган. М.: Наука, 1979. – 832 с.

9. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964. –574 с.