

Гришко И. А.

Национальный
технический
университет
Украины
«Киевский
политехнический
институт»

УДК 534-8, 621.647.23

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ТРУБЧАТОГО КАВИТАТОРА С РАДИАЛЬНОЙ ФОРМОЙ КОЛЕБАНИЙ

Розглянуті особливості збудження ультразвукової кавітації в трубчатому вібраторі, що здійснює радіальні коливання. Розроблена математична модель роботи такого вібратора та проведено чисельне моделювання з урахуванням граничних умов. Отримано підтвердження концентрації ультразвукової енергії вздовж осі циліндричного вібратора та показана можливість отримання в області повздожньої вісі високого рівня інтенсивності ультразвукових коливань. Наведені рекомендації для інженерного проектування даного типу ультразвукового обладнання

The features of excitation of ultrasonic cavitation in tubular vibrator that performs radial oscillations. The mathematical model of a vibrator and conducted numerical modeling of the boundary conditions. Proof of the concentration of ultrasonic energy along the axis of the cylindrical vibrator and the possibility of getting in the longitudinal axis of the high-intensity ultrasonic vibrations. Recommendations for engineering design of this type of ultrasound equipment.

Многие технологические процессы, связанные с применением ультразвуковой кавитации, напрямую зависят от величины достигаемого уровня интенсивности ультразвука в зоне обработки. Высокие интенсивности ультразвука необходимы, например, при инактивации микроорганизмов в жидких технологических средах [1-3], при кавитационной обработке нефти в процессе добычи, транспортировки или переработки [4,5] и т.д. Достичь, высокие уровни интенсивности ультразвука возможно несколькими способами, наиболее рациональным является способ, базирующийся на использовании цилиндрических фокусирующих систем, позволяющих производить интенсивную кавитационную обработку жидкости в потоке [6].

Знание особенностей образования звукового поля в технологическом объеме цилиндрической фокусирующей системы позволит дать рекомендации разработчикам подобного оборудования.

Исследуемая кавитационная камера представляет собой проточный трубчатый резонансный вибратор, возбуждаемый на

частоте радиальных колебаний, длина которого меньше половины длины волны возбуждаемых в трубе резонансных радиальных колебаний. Четыре резонансные пьезоэлектрические привода, со ступенчатыми трансформаторами скорости, передают колебания в трубчатый вибратор, благодаря фиксации малой ножевидной ступени вдоль образующей цилиндрической поверхности (рис. 1). Такое конструктивное решение позволило ввести в трубчатый вибратор ультразвуковую энергию с минимальным негативным влиянием на форму возбуждаемых в вибраторе колебаний.

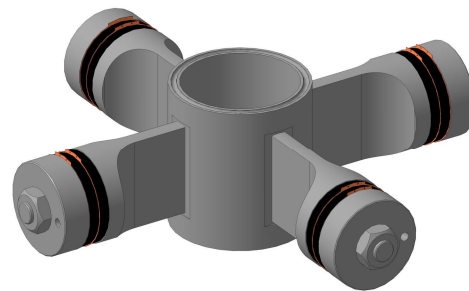
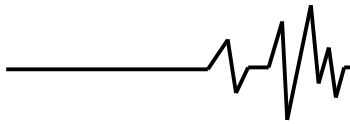


Рис. 1. Ультразвуковая кавитационная проточная камера в виде трубчатого вибратора



В заполненном жидкостью технологическом объеме кавитационной камеры конфигурация кавитационной области повторяет конфигурацию поля звукового давления. При этом интенсивность кавитационных явлений будет пропорциональна величине звукового давления.

Решение задачи о конфигурации поля в цилиндрической кавитационной камере целесообразно проводить в цилиндрической системе координат. В соответствии с расчетной схемой (рис. 2) ось z направлена вдоль оси цилиндра, а начало координат совпадает с осью цилиндра. Пусть высота цилиндра равна h , а радиус a .

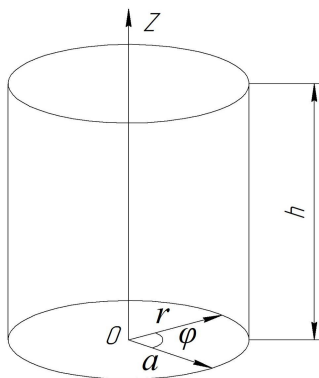


Рис. 2. Расчетная схема кавитационной проточной камеры в виде трубчатого вибратора, совершающего радиальные колебания

Волновое уравнение в цилиндрических координатах для потенциала скорости Φ имеет вид [7,8]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

где r – радиус-вектор; φ – полярный угол; c – скорость звука жидкости.

В случае, если в цилиндре отсутствуют изгибные колебания, потенциал скорости Φ не будет зависеть от φ и уравнение несколько упроститься:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Решение уравнения (1) удобно искать методом разделения переменных Фурье. Пусть потенциал скорости является произведением трех функций:

$$\Phi(r, z, t) = R(r) \cdot Z(z) \cdot T(t), \quad (2)$$

где функция $R(r)$ зависит только от r , $Z(z)$ зависит только от z и $T(t)$ зависит только от t .

Подставив (2) в (1) и разделив результат на $R(r) \cdot Z(z) \cdot T(t)$, получим

$$\left(\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{R(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \left(\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Выражение в первых скобках зависит только от r , во вторых скобках – только от z , а правая часть зависит только от t . Выражение (3.3) тождественно только тогда, когда выражения в скобках равны постоянным величинам. Следовательно, выражение (3) распадается на систему уравнений:

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = k^2, \quad (4)$$

$$\left(\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \right) = k_z^2, \quad (5)$$

$$\left(\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{R(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) = k_r^2. \quad (6)$$

При этом, исходя из (3), выполняется условие

$$k_r^2 + k_z^2 = k^2 \quad (7)$$

Приведем уравнение (6) к виду

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + k_r^2 R(r) = 0,$$

получаем уравнение, решением которого является цилиндрическая функция Бесселя нулевого порядка [9]:

$$R(r) = J_0(k_r r). \quad (8)$$

Решением уравнения (5) является комбинация гармонических функций:

$$Z(z) = A \sin(k_z z) + B \cos(k_z z), \quad (9)$$

где A и B константы, определяемые из граничных условий.

Решением уравнения (4) является гармоническая функция

$$T(t) = \sin(\omega \cdot t), \quad (10)$$

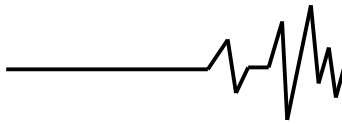
где ω – круговая частота.

При этом $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$, где f – частота гармонических колебаний.

В результате подстановки (8), (9), (10) в (2), получаем:

$$\Phi(r, z, t) = J_0(k_r r) \cdot (A \cdot \sin(k_z z) + B \cdot \cos(k_z z)) \cdot \sin(\omega t) \quad (11)$$

Соотношения между волновыми числами будут определяться граничными условиями. Возможны три варианта граничных условий, определяемые конструктивными особенностями рассматриваемой кавитационной камеры:



- отсутствие торцевых крышек (вариант с мягкими стенками);
- наличие двух торцевых крышек (вариант с жесткими стенками);
- наличие одной торцевой крышки (вариант с одной мягкой и с одной жесткой стенкой).

Так, для абсолютно жесткой стенки, например, торцевой крышки кавитационной камеры, колебательная скорость частиц на стенке равна нулю.

$$V_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0. \quad (12)$$

В случае абсолютно мягкой стенки, например, границы жидкость-воздух в открытой кавитационной камере, на границе раздела должно выполняться условие равенства нулю величины звукового давления, а значит и потенциала скорости

$$\Phi = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим случай кавитационной резонансной камеры, закрытой по торцам абсолютно мягкими стенками.

В таком случае граничные условия примут вид:

$$\left. \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad (14)$$

$$\Phi(z)|_{z=0} = 0, \quad \Phi(z)|_{z=h} = 0. \quad (15)$$

После подстановки (14) в (11) и с учетом того, что $\frac{\partial J_0(x)}{\partial x} = -J_1(x)$, получаем

$$J_1(k_r r) = 0. \quad (16)$$

Значения первых пяти корней, удовлетворяющих выражению (16), приведены в табл. 1.

Таблица 1

Корни уравнения (16)

	Номер корня, i				
	1	2	3	4	5
$n_i = k_r a$	0	3,832	7,016	10,174	13,324

Первый корень можно отбросить, так как он отвечает нулевой частоте, в связи с чем $J_0(0) = 0$.

Для абсолютно мягких стенок условие (15) дает систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A \sin(k_z 0) + B \cos(k_z 0) = 0, \\ A \sin(k_z h) + B \cos(k_z h) = 0. \end{cases}$$

В результате решения системы получаем:

$$B = 0, \quad k_z \cdot h = \pi \cdot m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

В результате для собственных частот должны выполняться условия:

$$\begin{cases} k_r = \frac{n_i}{a}, \\ k_z = \frac{\pi \cdot m}{h}, \\ k_r^2 + k_z^2 = \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot f}{c} \right)^2. \end{cases} \quad (18)$$

Из выражения (18) можно найти набор собственных частот для жидкости в резонансной цилиндрической кавитационной камере заданных геометрических размеров:

$$f = \frac{c}{2 \cdot \pi} \sqrt{\left(\frac{n_i}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi \cdot m}{h} \right)^2}. \quad (19)$$

Результаты расчета набора собственных частот жидкости, заполняющей трубчатую кавитационную камеру радиусом 31 мм, высотой 80 мм, приведены в таблице 2. В качестве жидкости использовалась вода со скоростью звука 1500 м/с.

Таблица 2

Набор собственных частот резонансной камеры

	f , кГц			
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$i = 2$	30,96	34,96	40,76	47,72
$i = 3$	54,84	57,19	60,91	65,77
$i = 4$	78,91	80,56	83,24	86,86

Рассмотрим случай кавитационной резонансной камеры, закрытой по торцам абсолютно жесткими стенками.

В таком случае граничные условия примут вид:

$$\left. \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \right|_{z=h} = 0. \quad (21)$$

После подстановки (20) в (11) и с учетом того, что $\frac{\partial J_0(x)}{\partial x} = -J_1(x)$, получаем

$$J_1(k_r r) = 0. \quad (22)$$

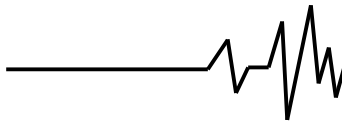
Значения первых десяти корней, удовлетворяющих выражению (22), получаются аналогичными приведенным в табл. 1.

Как и в предыдущем случае, первый корень можно отбросить, так как он отвечает нулевой частоте, в связи с чем $J_0(0) = 0$.

Для абсолютно жестких стенок условие (21) дает систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A k_z \cos(k_z 0) - B k_z \sin(k_z 0) = 0, \\ A k_z \cos(k_z h) - B k_z \sin(k_z h) = 0, \end{cases}$$

в результате решения которой, получаем:



$$A = 0, \quad k_z \cdot h = \pi \cdot m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

В результате для собственных частот должны выполняться условия, аналогичные (18), а набор собственных частот для жидкости в резонансной цилиндрической кавитационной камере заданных геометрических размеров рассчитывается по аналогичному (19) уравнению и полученные значения собственных частот будут соответствовать, приведенным в таблице 2.

Рассмотрим случай кавитационной резонансной камеры, закрытой с одного торца абсолютно жесткой стенкой, а с другого торца абсолютно мягкой.

В таком случае граничные условия примут вид:

$$\left. \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \Phi(z)|_{z=h} = 0. \quad (25)$$

После подстановки (24) в (11) и с учетом того, что $\frac{\partial J_0(x)}{\partial x} = -J_1(x)$, получаем

$$J_1(k_r r) = 0. \quad (26)$$

Значения первых десяти корней, удовлетворяющих выражению (26), будут аналогичными, приведенным в табл. 1.

Как и в предыдущих случаях, первый корень можно отбросить, так как он отвечает нулевой частоте, в связи с чем $J_0(0) = 0$.

Для данной комбинации торцов кавитационной камеры условие (25) даст систему двух уравнений:

$$\begin{cases} Ak_z \cos(k_z 0) - Bk_z \sin(k_z 0) = 0, \\ A \sin(k_z h) + B \cos(k_z h) = 0. \end{cases}$$

В результате решения системы, получаем

$$A = 0, \quad k_z \cdot h = \frac{\pi}{2} \cdot m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

Тогда для собственных частот должны выполняться условия

$$\begin{cases} k_r = \frac{n_i}{a}, \\ k_z = \frac{\pi \cdot m}{2 \cdot h}, \\ k_r^2 + k_z^2 = \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot f}{c} \right)^2. \end{cases} \quad (28)$$

Из выражения (28) можно найти набор собственных частот жидкости, заполняющей трубчатую кавитационную камеру заданных геометрических размеров

$$f = \frac{c}{2 \cdot \pi} \sqrt{\left(\frac{n_i}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi \cdot m}{2 \cdot h} \right)^2}. \quad (29)$$

Результатом решения уравнения (29) является набор собственных частот жидкости, заполняющей трубчатую кавитационную камеру радиусом 31 мм, высотой 80 мм. Полученные данные приведены в таблице 3. В качестве жидкости использовалась вода со скоростью звука 1500 м/с.

Таблица 3

Набор собственных частот резонансной камеры

	f , кГц			
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$i = 2$	29,88	30,96	32,69	34,96
$i = 3$	54,23	54,84	55,83	57,19
$i = 4$	78,49	78,91	79,6	80,56

Полученные аналитические выражения (11), (17), (18), (23.), (27) и (28) позволяют визуализировать картину образования и распространения кавитационных областей в объеме исследуемого трубчатого вибратора.

Возникающую конфигурацию кавитационной области или звукового давления удобно разделить на моды. При этом номер моды (i, m) будет состоять из двух чисел.

Для случая, когда резонансная кавитационная камера закрыта по торцам абсолютно мягкими стенками, i - это номер решения уравнения (16), а m - номер решения уравнения (17). В случае, когда резонансная кавитационная камера закрыта по торцам абсолютно жесткими стенками, i - это номер решения уравнения (22), а m - номер решения уравнения (23). При рассмотрении случая, когда кавитационная резонансная камера закрыта с одного торца абсолютно жесткой стенкой, а с другого торца абсолютно мягкой, i - это номер решения уравнения (26), а m - соответственно номер решения уравнения (27).

Наибольший интерес представляют частоты 29,88 кГц и 30,96 кГц, как наиболее близкие к рабочей частоте резонансной кавитационной камеры 22,4 кГц. Следует отметить, что при уменьшении скорости звука, (что наблюдается в квитирующей жидкости) резонансная частота понижается и для режима развитой кавитации (уменьшение скорости звука порядка 30%) составляет 19,6 кГц.

Конфигурация звукового поля в резонансной кавитационной камере, закрытой с одного торца абсолютно жесткой стенкой, а с другого торца абсолютно мягкой, представлена на рис. 3 и рис. 4 с учетом различных мод колебаний.

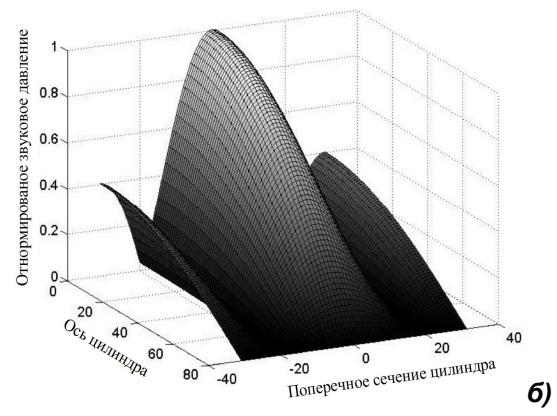
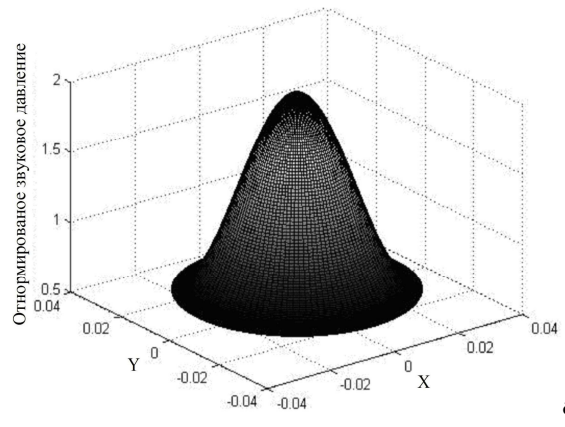
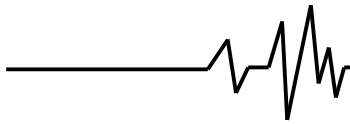


Рис. 3. Конфигурация звукового поля моды (2.1) в проточной камере с цилиндрическим вибратором: а - в плоскости перпендикулярной оси; б - в плоскости параллельной оси

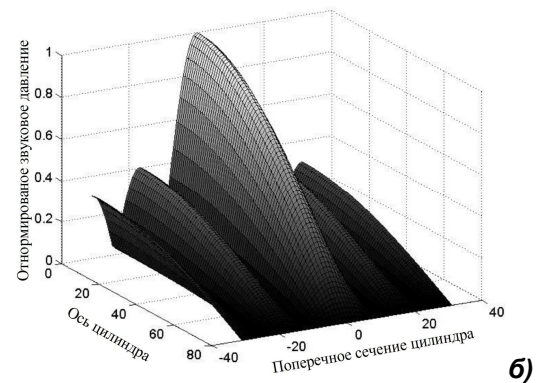
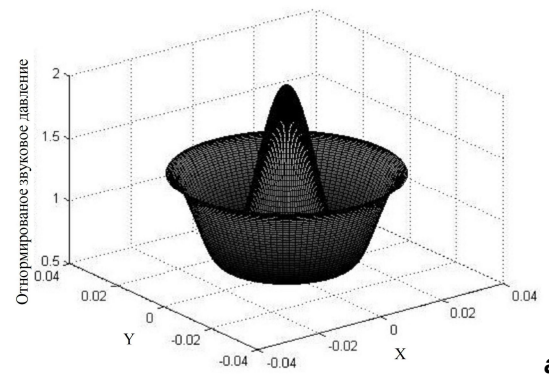


Рис. 4. Конфигурация звукового поля моды (3.1) в проточной камере с цилиндрическим вибратором: а - в плоскости перпендикулярной оси; б - в плоскости параллельной оси

Конфигурация звукового поля в резонансной кавитационной камере, закрытой по торцам абсолютно жесткими или мягкими

стенками будет одинакова, это представлено на рис. 5 и рис. 6 с учетом различных мод колебаний.

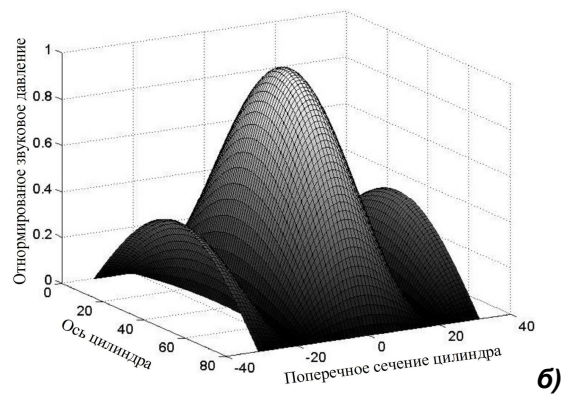
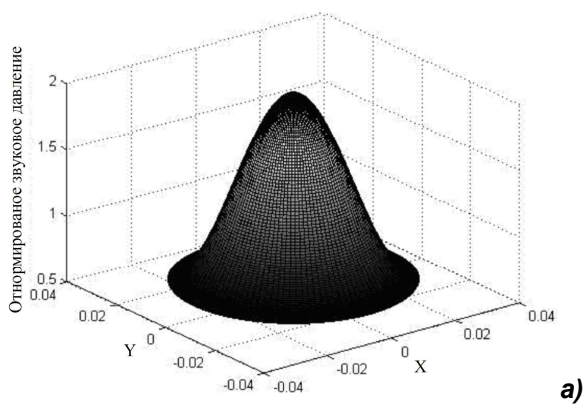


Рис. 5. Конфигурация звукового поля моды (2.1) в проточной камере с цилиндрическим вибратором: а - в плоскости перпендикулярной оси; б - в плоскости параллельной оси

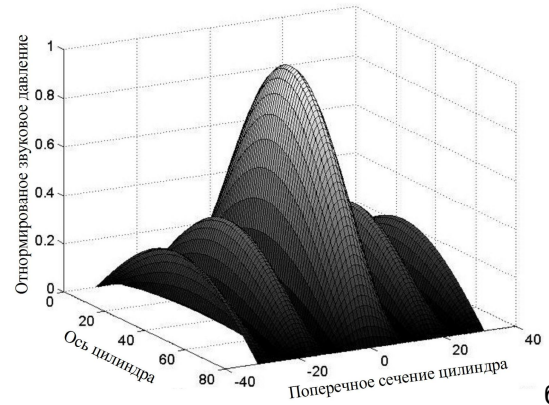
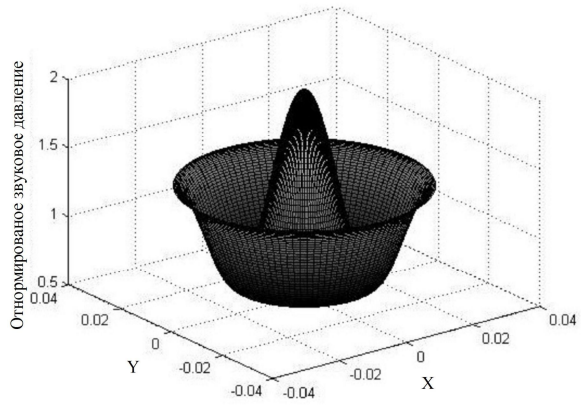
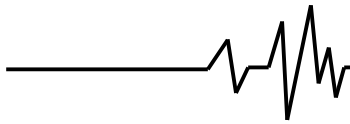


Рис. 6. Конфигурация звукового поля моды (3.1) в проточной камере с цилиндрическим вибратором: а - в плоскости перпендикулярной оси; б - в плоскости параллельной оси

В связи с тем, что интенсивность кавитационных явлений зависит от величины звукового давления, определять конфигурацию кавитационной области удобно методом

секущих. Это проиллюстрировано на примере резонансной кавитационной камеры, закрытой по торцам абсолютно мягкими стенками (рис. 7).

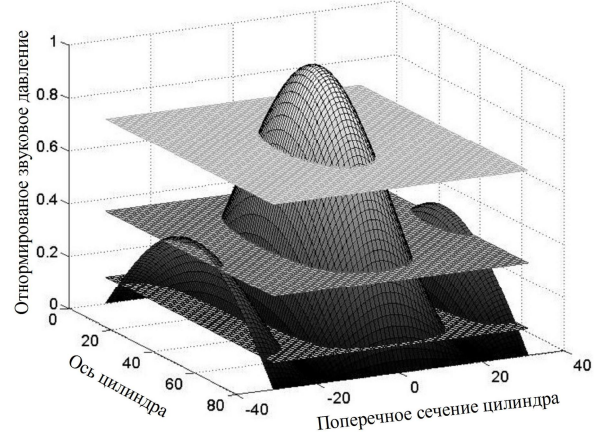


Рис. 7. Секущие для моды (2.1)

Метод секущих заключается в построении секущей плоскости с заданным уровнем звукового давления.

конфигурацию интенсивности кавитационных явлений в интересующей нас плоскости (рис. 8).

Пересечение секущей области и трехмерного графика звукового давления даст

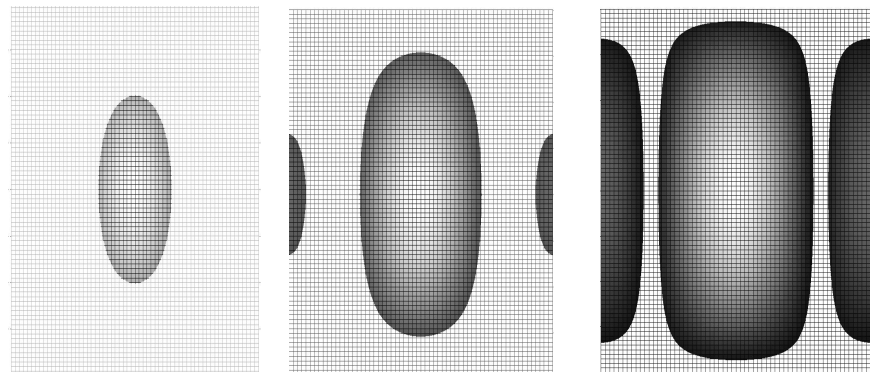
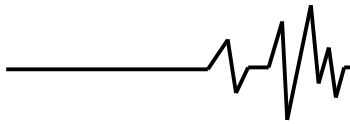


Рис. 8. Расчетные данные конфигурации кавитационной области методом секущих плоскостей при различных уровнях звукового давления



Распределение звукового давления вдоль оси камеры неравномерно, так как часть энергии тратится на преодоление сил вязкого трения, а часть поглощается и рассеивается кавитационными пузырьками. Введя в уравнение потенциала скорости (11) соответствующий множитель получим, уравнение вида

$$\Phi(r, z, t) = J_0(k_r r) \cdot (A \cdot \sin(k_z z) + B \cdot \cos(k_z z)) \cdot e^{-\delta \cdot z} \cdot \sin(\omega t) \quad (30)$$

где δ - декремент затухания.

Принимая во внимание уравнение (30) и граничные условия (17), (18), построим графики распространения уровня звукового давления вдоль оси камеры для мод колебаний (2.1) и (3.1), когда кавитационная резонансная камера закрыта по торцам абсолютно мягкими стенками (рис. 9).

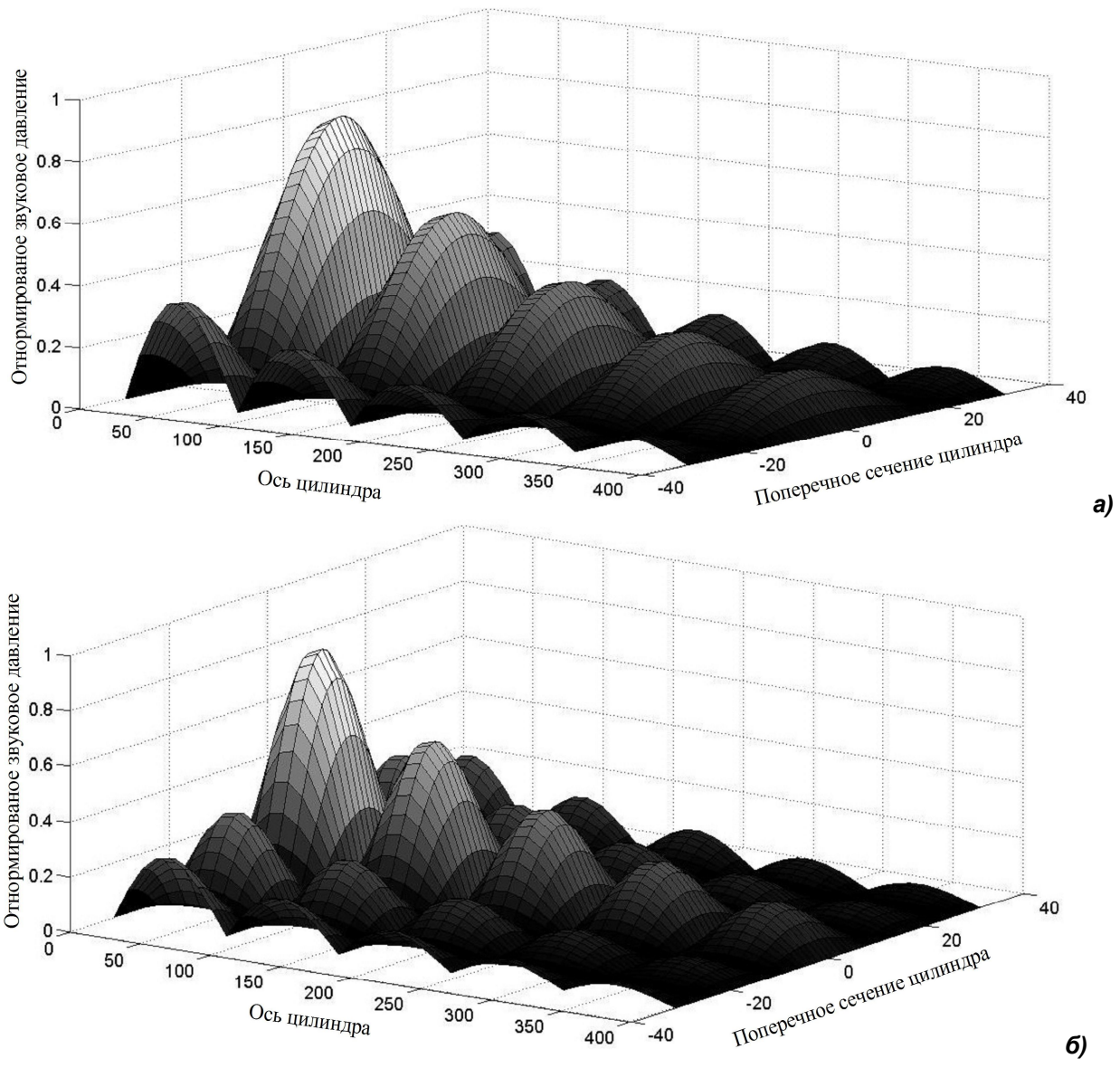


Рис. 9 Конфигурация звукового поля в проточной камере с цилиндрическим вибратором (торцы закрыты абсолютно мягкими крышками): а - мода (2.1); б - мода (3.1)

Как и в предыдущем случае, принимая во внимание уравнение (30) и граничные условия (27), (28), построим графики распространения уровня звукового давления вдоль оси камеры для мод колебаний (2.1) и (3.1), когда

кавитационная резонансная камера закрыта с одного торца абсолютно жесткой стенкой, а с другого торца абсолютно мягкой стенкой (рис. 10).

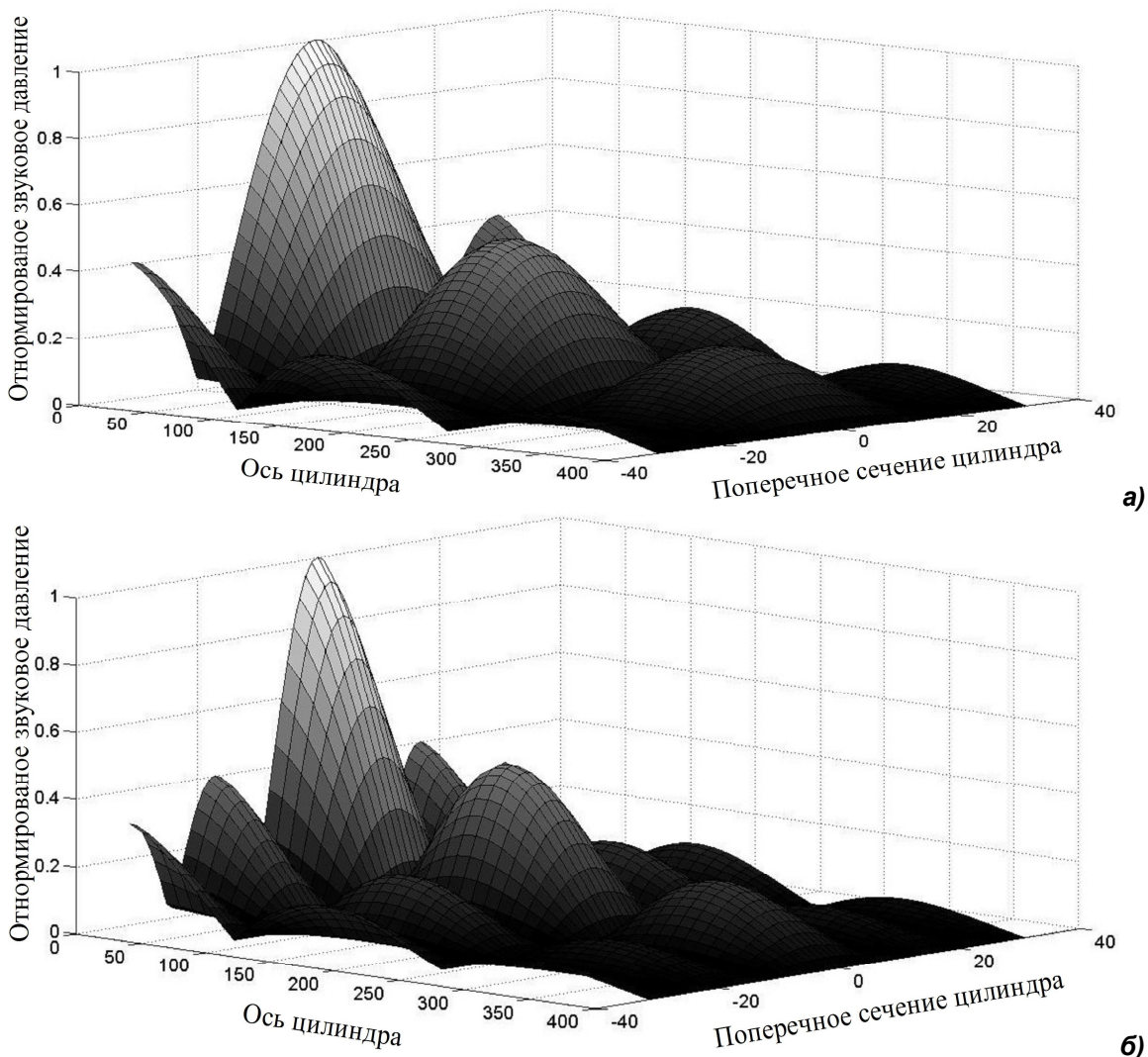
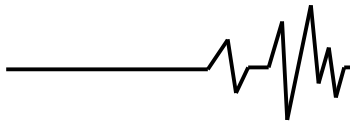


Рис. 10. Конфигурация звукового поля в проточной камере с цилиндрическим вибратором (один торец закрыт абсолютно мягкой крышкой, а второй - абсолютно жесткой): а - мода (2.1); б - мода (3.1)

Полученные графические зависимости позволяют выявить расположение в кавитационной камере областей максимальной интенсивности кавитации и, тем самым, сформулировать рекомендации для проектировщиков ультразвукового технологического оборудования, в основе которого лежит трубчатый резонансный вибратор:

- необходимо конструктивно обеспечить движение обрабатываемой жидкости в области центральной оси вибратора, по возможности остановив движение жидкости вдоль стенок вибратора;

- чрезмерное увеличение амплитуды колебаний трубчатого вибратора приводит к расширению кавитационной зоны от центральной оси к стенкам, что приводит к

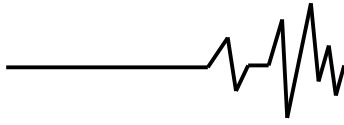
возможности кавитационной эрозии внутренней поверхности кавитационной камеры;

- подводящие и отводящие трубы технологического оборудования должны быть на протяжении не менее 0,5 м. выполнены из кавитационно-стойкого материала.

Выводы

1. Представленная математическая модель позволяет визуализировать расположение и интенсивность кавитационных областей в объеме цилиндрической кавитационной камеры, совершающей радиальные резонансные колебания, что позволяет достичь высокой эффективности создаваемого технологического оборудования.

2. Подтвержден эффект концентрации ультразвуковой энергии вдоль оси в



цилиндрическом вибраторе при совершении радиальных колебаний, возбужденных ультразвуковыми резонансными приводами, которые имеют ножевидную форму трансформатора колебательной скорости и установлены на наружной образующей поверхности вибратора.

3. Подтверждена возможность достижения в области продольной оси исследуемого цилиндрического кавитатора интенсивности ультразвука порядка 50...80 Вт/см². Дальнейшее повышение интенсивности звука связано с непропорциональным ростом потерь в связи с образованием на внутренней поверхности вибратора двухфазной кавитационной прослойки.

4. Показано, что последовательная установка кольцевых вибраторов должна осуществляться на расстоянии кратной длине волны распространяемых вдоль оси, ультразвуковых колебаний с целью получения возможности сложения величины звукового давления, что даст возможность повысить эффективность обработки потока жидкости.

Литература

1. Эльпинер И.Е. Ультразвук. Физико-химическое и биологическое действие. - М. : Физматиз, 1963. – 430 с.
2. Луговской А.Ф. Оценка методов обеззараживания воды / А. Ф. Луговской, А. В. Мовчанюк, И. А. Гришко // – Вест. Нац. техн. ун-та Украины «Киев. политехн. ин-т» : серия

«Машиностроение». – 2008. - № 52. – С.103-111.

3. Ультразвук. Маленькая энциклопедия / Глав. ред. И. П. Голямина. - М.: Советская энциклопедия, 1979. – 400 с.

4. Луговской А.Ф. Ультразвуковая кавитация в современных технологиях / А. Ф. Луговской, Н. В. Чухраев. - К. : ВПЦ «Київ. ун-т», 2007. - 244 с.

5. Падалка Е.С. Ультразвук в нефтяной промышленности. – К.: Гос. изд. техн. лит. 1962. - 67с.

6. Луговской А.Ф. Проблемы создания технологического оборудования для ультразвукового кавитационного обеззараживания воды / И. А. Гришко // – Промислова гідроліка і пневматика, № 4 (26),- Вінниця, 2009, с.3-6.

7. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. -710 с.

8. Луговской А.Ф., Мовчанюк А.В., Гришко И. А. Особенности возникновения кавитации в технологическом объеме ультразвукового трубчатого кавитатора с радиальной модой колебаний. Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Гірниче-електромеханічна, Донецьк, Вип. 20(176),2010, с.75- 84

9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том второй.- М.: Наука, 1974. – 655 с.